N°3050

THESE

présentée pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

à

l'Université de Paris-Sud

PARIS XI

Spécialité : *Physique*

Mention : *Optique*

par

BERNARD JEAN

Sujet de la Thèse : *INTERFEROMETRE A DOUBLE PLAGE PAR PHOTOGRAPHIE " SPECKLE ". ETUDE DES APPLICATIONS ET DES LIMITES D'UTILISATION.*

Soutenue le 30 JUIN 1981

Devant la Commission composée de :

Mr	M. FRANCON	Président
Mr	S. LOWENTHAL	Examinateur
Mme	M. GANDAIS	Examinateur
Mme	M.L ROBLIN	Examinateur

THESE

présentée pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

à

l'Université de Paris-Sud

PARIS XI

Spécialité : *Physique*

Mention : *Optique*

par

BERNARD JEAN

Sujet de la Thèse : *INTERFEROMETRE A DOUBLE PLAGE PAR PHOTOGRAPHIE " SPECKLE ". ETUDE DES APPLICATIONS ET DES LIMITES D'UTILISATION.*

Soutenue le 30 JUIN 1981

Devant la Commission composée de :

Mr	M. FRANÇON	Président
Mr	S. LOWENTHAL	Examinateur
Mme	M. GANDAIS	Examinateur
Mme	M.L ROBLIN	Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

R E M E R C I E M E N T S

Cette étude a été effectuée dans le cadre de l'Institut d'Optique, je remercie Monsieur le Professeur MARECHAL qui m'a permis de réaliser ce travail.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur FRANÇON de m'avoir accueilli dans son laboratoire, je le remercie d'avoir bien voulu présider le jury de ma thèse.

Je remercie M. LOWENTHAL et Mmes GANDAIS et ROBLIN d'avoir accepté de participer à ce jury.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Mme ROBLIN pour le temps qu'elle a consacré à diriger ce travail ainsi que pour les enseignements reçus auprès d'elle.

Je souhaite également remercier tout le laboratoire pour l'accueil et l'aide qu'il m'a apporté.

Je remercie enfin Madame VU qui a eu la gentillesse de dactylographier le texte de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION. page 1

CHAPITRE I : Holographie par photographie "speckle": généralités, rappel de différentes applications et applications proposées. Page I-1

1 - Caractéristiques d'un "diffuseur séparateur de faisceaux" - I-1
2 - Réalisation d'une expérience d'holographie par photographie "speckle" - I-2
3 - Enregistrement dans l'image optique: holographie de la pupille. - I-4
1 - Enregistrement en un seule pose et observation hors du montage: expérience de Tanner - I-5
2 - Expérience de Burch - I-5
3 - Expérience d'interférométrie différentielle - I-6
4 - Expérience proposée et applications - I-6

CHAPITRE II : Interféromètre à double plage par photographie "speckle". Application aux déplacements. - II-1

1 - Principe de l'expérience - II-1
1 - Enregistrement holographique - II-1
2 - Restitution de l'hologramme - II-3
2 - Caractérisation des systèmes d'interférence - II-5
3 - Applications aux déplacements - II-8
1 - Déplacements latéraux - II-9
2 - Déplacements longitudinaux - II-11
4 - Etude de la visibilité des franges en présence d'un déplacement. - II-15
1 - Enregistrement de l'hologramme de la pupille à distance finie - II-15
2 - Reconstruction holographique de la pupille. - II-17

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547318_0031

3 - Etude de la visibilité des franges. page II-19
4 - Résultats et interprétation physique. - II-21
5 - Autres applications. - II-23
1 - Plan image, courbure de champ - II-23
2 - Aberrations différentielles - II-24
3 - Variation de phase - II-26

CHAPITRE III : Etude du chromatisme d'un système optique. - III-1

1 - Rappels sur le chromatisme : chromatisme longitudinal et transversal. - III-1
2 - Principe de l'expérience. - III-2
1 - Enregistrement par une onde cohérente de longueur d'onde λ_o - III-2
2 - Restitution de l'hologramme par une onde cohérente de longueur d'onde λ - III-4
3 - Caractérisation des systèmes d'interférences. - III-6
3 - Détermination du chromatisme du système. - III-7
1 - Chromatisme longitudinal - III-7
2 - Chromatisme de grandissement et chromatisme apparent. - III-9
3 - Résultats expérimentaux. - III-11

CHAPITRE IV : Visibilité et localisation des franges d'interférences. Discussion des hypothèses - IV- 1

1 - Expression de la visiblité dans les images directe et conjuguée. - IV -2
1 - Rappel: formule générale de visibilité. - IV -2
2 - Application à l'interféromètre à double plage - IV -3
3 - Interprétation des résultats - IV -8
2 - Etude de la visibilité des franges par un enregistrement à pupille entière, localisation de la région de meilleure visibilité. - IV -10

3 - Influence des variations de phase résiduelles du diffuseur photographique sur la visibilité. page IV-23

CHAPITRE V:Méthode d'étude des aberrations de champ. - V-1

1 - Principe de l'expérience. Enregistrement en double pose. - V-1
2 - Résultats obtenus par filtrage sur l'hologramme - V-4
3 - Résultats obtenus par filtrage dans le plan de Fourier. - V-7
1 - Filtrage dans la direction O_u - V-7
2 - Filtrage dans la direction O_v - V-10
4 - Enregistrement holographie à pleine pupille. Filtrage en lumière blanche. - V-12
1 - Filtrage dans le plan de la plaque photographique. - V-15
2 - Filtrage dans le plan de Fourier - V-15
3 - Conclusion - V-18

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

Parmi les méthodes holographiques utilisées pour l'interférométrie, la photographie de "speckle patterns" (ou figures de granularité) permet des réalisations particulièrement simples. En effet, l'enregistrement photographique d'un "speckle" - quelque soit le montage utilisé - peut toujours être considéré comme un hologramme si l'on utilise un objet diffusant particulier, à la fois diffuseur et séparateur de faisceaux.

Un tel diffuseur placé sur un faisceau de lumière cohérente transmet sans déformation une part importante du faisceau incident - onde référence pour réaliser un hologramme - et diffuse une autre partie qui constituera l'onde objet, ou viendra éclairer l'objet à étudier.

Nous avons étudié les possibilités offertes dans le cas où l'hologramme est enregistré dans l'image optique d'un tel"diffuseur - séparateur de faisceaux". On réalise ainsi l'hologramme de la pupille éclairée par la lumière diffusée. Nous avons montré qu'il est possible d'obtenir, par remise en place de l'hologramme après développement, un interféromètre à double plage, les deux plages étant situées dans le plan de la pupille. Ces deux plages portent des informations différentes:

- informations principalement sur l'état de l'onde à l'enregistrement, obtenues sur la plage correspondant aux interférences entre pupille réelle et image holographique conjuguée.

- informations sur l'évolution de l'onde, sur la plage où interfèrent la pupille réelle et l'image directe.

Cet interféromètre fonctionne naturellement en "franges vivantes" c'est-à-dire en temps réel. Du fait de l'utilisation d'une onde diffusée les informations peuvent être obtenues en tout point du champ en utilisant l'ouverture totale du système optique.

A partir de cet interféromètre, il est possible d'envisager toute une gamme d'application:

- étude de déplacements (de l'objet, de l'hologramme, ou d'éléments liés à eux).

- étude des déformations ou perturbations du système optique (variations d'indice, déplacements d'éléments optiques).

- réglage et contrôle de position, par exemple du plan de mise au point (position et orientation) et des éléments optiques (centrage).

-centrage et alignement du faisceau lumineux incident

- propriétés du système optique (aberrations)

Nous rappellerons d'abord au chapitre I quelques expériences classiques d'holographie "speckle" et situerons notre travail par rapport à celles-ci. Nous donnerons ensuite l'étude complète des problèmes de déplacements dans le chapitre II.

Le chapitre III traite du chromatisme des systèmes optiques: c'est un prolongement direct du chapitre précédent puisqu'il s'agit d'étudier les déplacements d'images produits par la variation de longueur d'onde.

Le travail théorique porte essentiellement sur les problèmes de baisse de visibilité et de décorrélations, qui sont les principales causes des limitations observées ; ces limitations interviennent dans toute expérience d'interférométrie en lumière diffuse. Les expériences que nous avons effectuées nous ont conduit à considérer les aberrations du système, en particulier les aberrations de champ, comme un obstacle important au développement de nos méthodes. Dans le chapitre IV nous proposons une étude théorique et expérimentale des phénomènes de visibilité et localisation des franges, qui confirme ces observations.

Dans le chapitre V nous proposons une méthode particulièrement adaptée à l'étude des aberrations de champ, que nous avons appliquée à notre montage expérimental. De plus, cette étude a permis de mettre en évidence les propriétés spécifiques d'un filtrage en lumière blanche.

Nous donnerons en conclusion les résultats et perspectives concernant les différentes applications que nous avons envisagées au cours de ce travail.

CHAPITRE I

Holographie par photographie "speckle": généralités, rappel de différentes applications et applications proposées.

1 - Caractéristiques d'un "diffuseur-séparateur de faisceaux"

Nous avons indiqué en commençant cet exposé que toute photographie "speckle" pouvait être considérée comme un hologramme si l'objet diffusant qui produit la figure de "speckle" sépare le faisceau incident en deux parties:

- l'une, non modifiée, est suffisamment importante pour servir d'onde de référence.
- l'autre, diffusée, constitue l'onde objet.

Nous avons désigné cet objet diffusant comme un "diffuseur-séparateur de faisceaux". Il s'agit en fait d'un diffuseur partiel.

Notons que l'on observe fréquemment ce type de diffusion: c'est le cas où une source lumineuse apparait sous l'aspect d'une image non déformée, entourée d'un halo plus ou moins important de lumière diffusée. Cet effet se produit avec des diffuseurs de phase à variations faibles devant la longueur d'onde; avec des surfaces polies recouvertes de dépots peu importants: buée, ou poussières. C'est ce type de diffuseur qui intervient dans l'expérience d'interférence en lumière diffuse décrite par Newton (1), qui signale l'existence d'anneaux lorsqu'on éclaire un miroir qui est réfléchissant sur sa face arrière et dont la face avant constitue un tel diffuseur partiel (figure I-1)

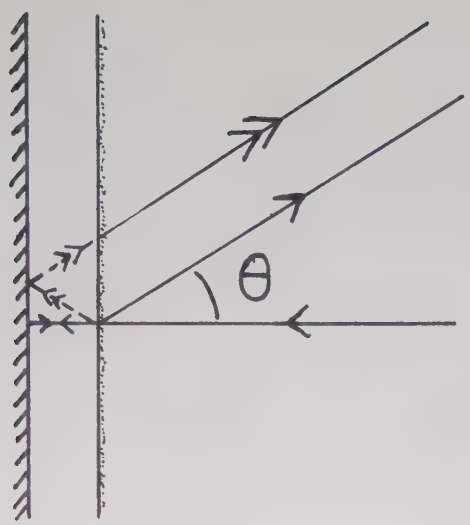


Figure I-1

Le rayon transmis au premier passage et diffusé après réflexion dans la direction θ interfère avec le rayon diffusé au premier passage et transmis après réflexion dans la même direction θ . Les anneaux ont une différence de marche nulle au centre, ce qui explique qu'ils aient pu être observés en lumière blanche.

L'objet"diffuseur-séparateur de faisceaux" que nous utiliserons est réalisé simplement par enregistrement photographique d'un "speckle". Il présente la propriété d'avoir une transparence réelle, et cette propriété est nécessaire pour obtenir le résultat cherché (chapitre II). Ce mode de réalisation permet d'autre part d'obtenir aisément une proportion donnée de lumière directement transmise, et de choisir l'étendue angulaire du halo diffusé.

2 - Réalisation d'une expérience d'holographie par photographie "speckle"

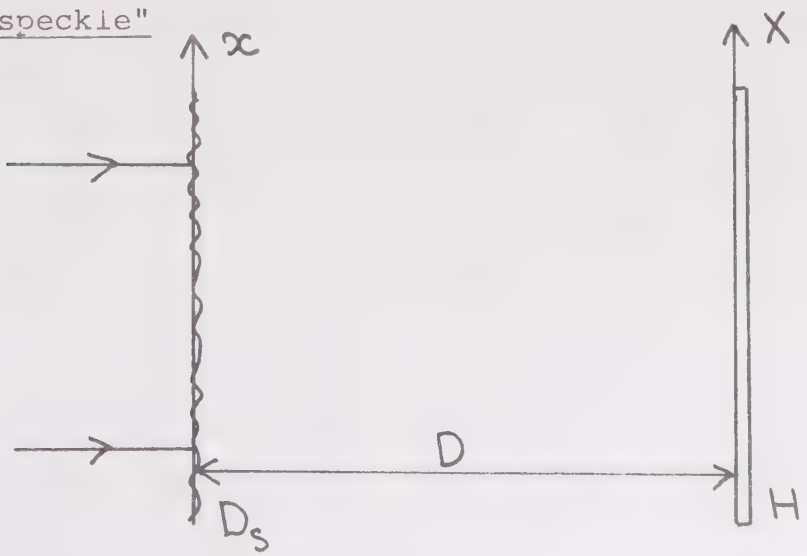


figure I-2

Le montage le plus simple est schématisé sur la figure I-2. Le diffuseur D_S, réalisé photographiquement comme nous venons de l'indiquer, et de transparence réelle $1+a(x)$ est éclairé par un faisceau parallèle de lumière cohérente.
Considérons une plaque holographique H à la distance D. L'amplitude complexe dans le plan à la distance D du diffuseur s'écrit:

$$1 + \int a(x) \cdot e^{j\frac{\pi (X-x)^2}{\lambda D}} dx = 1 + t(x) \qquad \text{(I-1)}$$

L'intensité est enregistrée sur la plaque holographique H. Après développement dans des conditions convenables de linéarité la transparence en amplitude de l'hologramme H peut se mettre sous la forme:

$$\alpha - \beta \left[1 + t(x) + t^*(x) \right]$$

En éclairant l'hologramme par un faisceau parallèle on reconstruit à un facteur constant près:

- l'amplitude $-a(x)$ à la distance D (à partir de $t(x)$)
- l'amplitude $-a^*(x)$ à la distance $-D$ (à partir de $t^*(x)$)

Comme l'amplitude $a(x)$ est réelle, $a(x) = a^*(x)$ et les deux répartitions d'amplitude reconstruites symétriquement par rapport à H, à la distance D, sont identiques. Ces deux images identiques, décalées longitudinalement, donnent naissance à l'infini à un système d'anneaux de Newton caractérisant la distance D.

A partir de cette expérience, on peut réaliser un interféromètre très simple pour l'étude en double pose ou en temps réel des objets de phase (2).
Après développement l'hologramme H est replacé exactement dans sa position initiale et réeclairé à travers le diffuseur dans les mêmes conditions qu'à l'enreigstrement. On introduit alors sur le faisceau incident un objet de phase de transparence complexe $e^{j\phi(x)}$
On montre facilement que l'on observe dans l'image directe un interférogramme d'intensité $1 - \cos \phi(x)$ caractérisant l'objet, la lumière correspondant à l'image conjuguée constituant, si elle n'est pas séparée angulairement de l'image directe, un fond de lumière parasite.

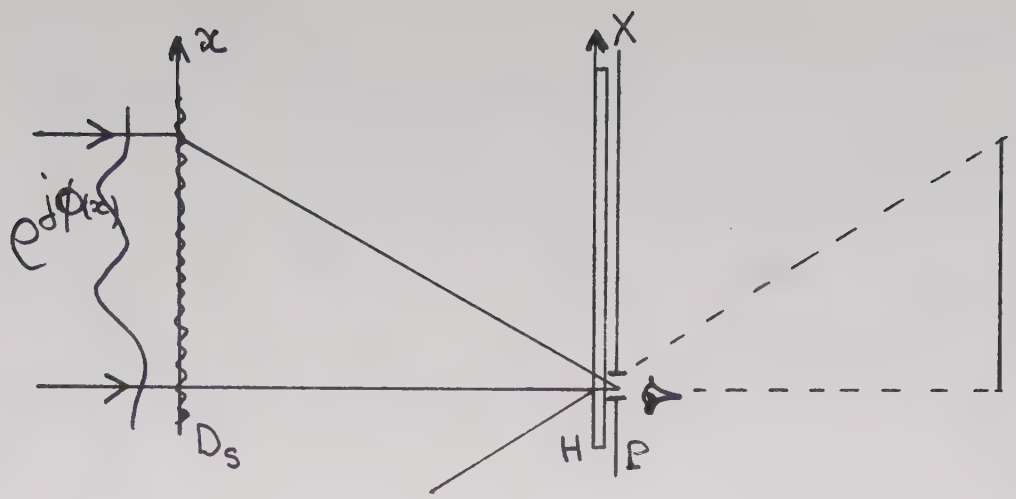


figure I-3

La séparation des images directe et conjuguée peut-être réalisée dans ce cas en utilisant une zone limitée située au bord de l'hologramme (figure I-3)

Nous retiendrons deux points que l'on retrouve constamment dans ce type d'expérience:

- l'interférence entre images directe et conjuguée est possible et donne un interférogramme caractéristique
- pour utiliser le système d'interférence en temps réel obtenu après remise en place, on aura à séparer les images directe et conjuguée.

3 - Enregistrement dans l'image optique: holographie de la pupille.

Le même type de diffuseur a été utilisé dans plusieurs expériences classiques, en formant une image optique; elles sont généralement appliquées à l'étude des aberrations.

La figure I-4 donne le schéma de principe. Un système optique de pupille P est éclairé par un faisceau lumineux cohérent, convergeant dans le plan de la pupille. Nous supposerons pour simplifier la présentation le système afocal de type 4f. Le diffuseur D_S est placé dans le plan objet du système. L'onde diffusée éclaire toute la pupille du système tandis que l'onde directe converge au centre. On désignera par u la coordonnée de fréquence spatiale correspondant à un point de la pupille. Si on désigne par $\tilde{A}(u)$ la transformée de Fourier de a(x) l'amplitude complexe dans le plan de la pupille s'écrit

$$\left[\delta(u) + \tilde{A}(u)\right] P(u)\, e^{j\phi(u)} \qquad \text{(I-2)}$$

où $P(u)$ est une fonction d'ouverture et où $\phi(u)$ est la fonction de phase caractérisant les aberrations.

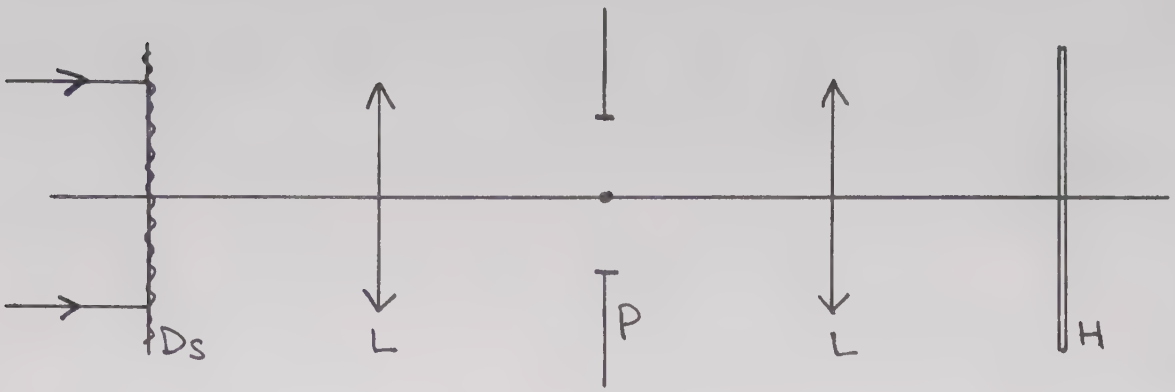


figure I-4

1) Enregistrement en une seule pose et observation hors du montage: expérience de Tanner (3)

L'amplitude complexe enregistrée sur une plaque photographique H placéedans le plan image est donnée par la transformée de Fourier de l'amplitude complexe dans la pupille (I-2). On montre qu'après développement et observation en lumière cohérente, on reconstruit dans le plan de Fourier de l'hologramme:

- pour l'image directe une amplitude:

$$\tilde{A}(u)\,P(u)\,e^{j\phi(u)}$$

- pour l'image conjuguée une amplitude:

$$\tilde{A}^{*}(-u)\,P(-u)\,e^{-j\phi(-u)}$$

L'hypothèse a(x) réel permet d'écrire:

$$\tilde{A}^{*}(-u) = \tilde{A}(u)$$

La partie aléatoire de l'amplitude est identique dans les deux images ce qui permet d'écrire l'intensité obtenue dans l'interférogramme sous la forme:

$$\left|\tilde{A}(u)\right|^{2}\cdot\left\{1+\cos\left(\phi(u)+\phi(-u)\right)\right\} \qquad \text{(I-3)}$$

L'expression (I-3) montre que l'on obtient ainsi des franges caractérisant le double des termes pairs de la fonction aberration.

2) Expérience de Burch (4)

Considérons le même montage optique (figure I-4) et supposons que l'on réalise un enregistrement photographique d'une image parfaite du diffuseur, par exemple en reproduisant par contact

le diffuseur D_S, et en le plaçant dans le plan image, après une rotation de π dans son plan. On peut alors considérer cette image parfaite du diffuseur comme l'hologramme de Fourier d'une pupille parfaite, c'est-à-dire d'amplitude uniforme. L'amplitude obtenue en temps réel dans la pupille et représentée par l'expression (I-2) vient s'ajouter à l'amplitude constante de l'image holographique, l'intensité de l'interférogramme est donnée par:

$$\left|\tilde{A}(u)\right|^2 . \left[1 + \cos\phi(u)\right]$$

et caractérise donc la fonction aberration.
La même expérience peut être utilisée pour étudier la surface d'un miroir sphérique; il faut alors utiliser un diffuseur à répartition symétrique, placé au voisinage du centre de courbure du miroir. Ce genre d'expérience fonctionne naturellement en temps réel. En déplaçant l'oeil dans le plan image on peut étudier les aberrations pour les différents points du champ.

3) Expérience d'interférométrie différentielle (5,6)

On utilise le même montage et on enregistre deux poses successivement dans le plan image, en déplaçant la source de référence dans le plan de la pupille entre les deux expositions: les deux images directes, d'une part, les deux images conjuguées, d'autre part, donnent par interférence la différentielle de la fonction aberration. La séparation des images directes et conjuguées à la reconstruction est obtenue en introduisant une obturation convenable de la pupille à l'enregistrement.

Toutes ces expériences d'interférométrie holographique sont donc utilisées pour l'étude des caractéristiques du système optique.

4) Expérience proposée et applications

Le montage que nous avons étudié dérive de l'expérience de Burch. Nous utilisons un enregistrement photographique dans l'image de l'objet diffusant, cependant dans notre cas c'est une image réelle qui est enregistrée et non pas une image parfaite. Pour séparer les images directe et conjuguée reconstruites dans le plan de la pupille nous obturons à l'enregistrement la moitié de la pupille, la pupille entière étant utilisée à la reconstruction.

Cette expérience permet d'obtenir en temps réel, et simultanément, les informations de l'expérience de Tanner et celles d'interférométrie différentielle. De plus elle permet deux autres applications originales à l'étude des aberrations: aberrations chromatiques (chapitre III) et aberrations de champ (chapitre V).

Cependant, nous avons développé cette étude en vue d'autres applications, telles l'étude des déplacements et déformations.

Si les méthodes holographiques par "speckle" n'ont pas été utilisées pour ce type d'applications, de nombreuses autres méthodes de "speckle" ont cependant été développées principalement pour la mesure de déplacements.

Les plus proches, par leur mise en oeuvre, de celles que nous proposons sont les méthodes de double photographie avec objet diffusant ordinaire. Les méthodes de double photographie ont été développées par de nombreux auteurs parmi lesquels Archbold et al. (7.8). En ce qui concerne la limite inférieure des déplacements mesurables,elle est définie, particulièrement pour le déplacement latéral, par la taille du grain de "speckle", c'est-à-dire par l'ouverture du système optique (ou des faisceaux formant le "speckle", s'il n'y a pas formation d'image).

D'autres méthodes, basées également sur les propriétés du "speckle" permettent de dépasser largement ces limites, cependant elles nécessitent l'emploi de systèmes d'éclairage particulier, par exemple la projection d'un système de franges de haute fréquence (9,10,11) ou d'un "speckle" auxiliaire (12,13). Elles font intervenir parfois des mesures photométriques de fluctuations d'intensité ou de contraste, alors que notre méthode se ramène à un comptage de franges.

Les performances de notre méthode sont limitées par les dimensions de la pupille, comme en double photographie "speckle", le plus petit nombre de franges décelables étant défini à partir des dimensions de pupille. Les avantages que nous pouvons reconnaitre à notre montage ne se situent donc pas au niveau des performances et des limites de sensibilité mais sont plutôt:

- une mise en oeuvre très simple, comme dans le cas de la double photographie "speckle"

- la possibilité d'opérer en temps réel
- la possiblité d'obtenir le signe des déplacements
- une gamme d'utilisation beaucoup plus grande pour les déplacements longitudinaux.

CHAPITRE II

INTERFEROMETRE A DOUBLE PLAGE PAR PHOTOGRAPHIE "SPECKLE". APPLICATION AUX DEPLACEMENTS. (14)

1 - Principe de l'expérience.

1) Enregistrement holographique.

L'expérience que nous proposons est réalisée à partir de l'enregistrement, sur une plaque photographique H, de l'image du diffuseur particulier. Le montage optique est défini sur la figure II-1, c'est un système 4 f dans lequel les passages plan objet-plan pupille et planpupille-plan image se font par simple transformation de Fourier.

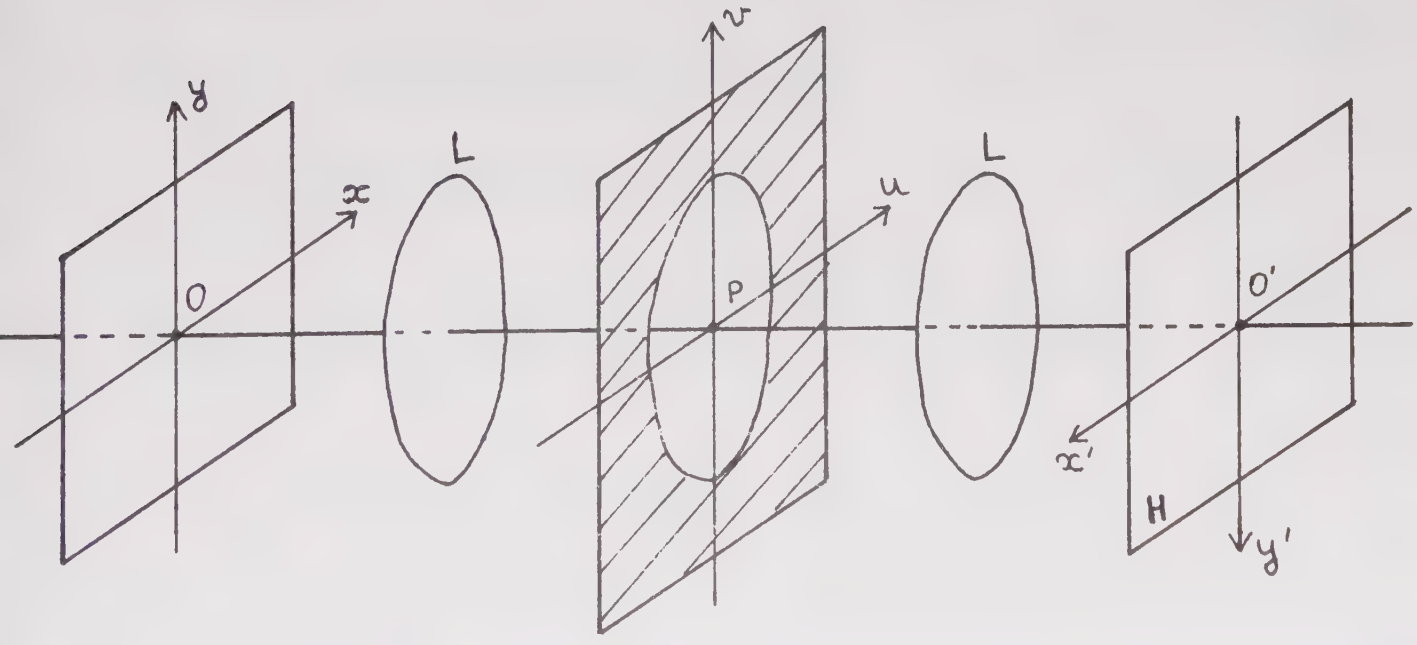


Figure II-1

Coordonnées : plan objet (x,y)
plan pupille (u,v) (fréquences spatiales)
plan image (x'y')

L'objet est un diffuseur d'amplitude, sa transparence complexe peut s'écrire sous la forme :

$$A_o + A(x,y) \qquad \text{(II-1)}$$

A_o représente l'onde directement transmise

$A(x,y)$ l'onde diffusée par l'objet

L'objet transmet directement une partie A_o du faisceau qui converge dans la pupille du système, l'autre partie, diffusée par l'objet"éclaire "la pupille du système. L'enregistrement photographique ainsi réalisé dans l'image du diffuseur est un hologramme de la pupille du système, l'onde directement transmise par l'objet et convergeant dans le plan de la pupille jouant le rôle d'onde de référence. On montre que cet hologramme restitue deux images, directe et conjuguée, de la pupille du système situées dans le même plan.

L'amplitude complexe dans le plan de la pupille s'écrit par simple transformation de Fourier :

$$A_o \delta(u,v) + \tilde{A}(u,v) \qquad \text{(II-2)}$$

avec $\tilde{A}(u,v)$ transformée de Fourier de $A(x,y)$
On réalise une diaphragmation au niveau de la pupille, la transparence de la pupille est $P(u,v)$ avec :

$$P(u,v) = 1 \quad \text{pour} \quad u^2+v^2 < \alpha^2/\lambda^2$$

$$P(u,v) = 0 \quad \text{pour} \quad u^2+v^2 > \alpha^2/\lambda^2$$

α étant l'ouverture angulaire de la pupille.
Les aberrations du système peuvent se mettre sous la forme d'un terme de déphasage $\phi(u,v,x,y)$ l'origine des phases étant prise au centre de la pupille.

L'amplitude complexe à la sortie de la pupille s'écrit:

$$\left[A_o \delta(u,v) + \tilde{A}(u,v)\right] P(u,v)\, e^{i\phi(u,v,x,y)} \qquad \text{(II-3)}$$

Dans le plan image du diffuseur l'amplitude complexe est :

$$A_o + TF^{-1}\left[\tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x,y)}\right] \qquad \text{(II-4)}$$

La plaque photographique placée dans le plan image enregistre l'intensité reçue:

$$A_o^2 + A_o TF^{-1}\left(\tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x,y)}\right)$$
$$+ A_o\left[TF^{-1}\left(\tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x,y)}\right)\right]^* + \left|TF^{-1}\left(\tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x,y)}\right)\right|^2$$

La transparence de la plaque photographique se met alors sous la forme de quatre termes:

A_o^2 terme constant indépendant du sytème.

$$\mathcal{C}_D(x',y') = \int \tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x,y)}\, e^{+2j\pi(ux'+vy')}\, du\, dv$$

$$\mathcal{C}_C(x',y') = \mathcal{C}_D^*(x',y') \qquad \text{(II-5)}$$

On négligera le quatrième terme $\left|\mathcal{C}_D(x',y')\right|^2$

2) Restitution de l'hologramme

Après développement, l'hologramme est remis en place le montage restant identique, et à la pupille réelle éclairée par l'onde diffusée se superposent les images directe et conjuguée reconstruites par l'hologramme. Le plan de la pupille est alors observé soit directement soit au foyer d'une lentille placée après l'hologramme.

Les aberrations, définies à partir du terme de phase $\phi(u,v,x,y)$, dépendant de la position du point dans le champ on utilisera un diaphragme $p(x'-x'_o, y'-y'_o)$, centré au point (x'_o, y'_o) sur la plaque, pour obtenir une fonction aberration bien définie.

L'amplitude de l'image directe reconstruite s'écrit alors :

$$I_D(u',v') = \int \tilde{A}(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x',y')}\, P(u,v)\, p(x'-x'_o, y'-y'_o)\, e^{-2j\pi(ux'+vy')}\, e^{2j\pi(u'x'+v'y')}\, du\, dv\, dx'\, dy' \quad \text{(II-6)}$$

L'amplitude de l'image conjuguée:

$$I_C(u',v') = \int \tilde{A}^*(u,v)\, e^{-j\phi(u,v,x',y')}\, P(u,v)\, p(x'-x'_o, y'-y'_o)\, e^{2j\pi(ux'+vy')}\, e^{2j\pi(u'x'+v'y')}\, du\, dv\, dx'\, dy' \quad \text{(II-7)}$$

A ces images, directe et conjuguée, se superpose l'onde réelle diffusée par l'objet:

$$O_D(u',v') = \tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x',y')} \quad \text{(II-8)}$$

Deux hypothèses que nous discuterons par la suite, permettent de simplifier les calculs des amplitudes I_D et I_C :

- On suppose les variations de $\phi(u,v,x',y')$ en fonction de (x', y') négligeables sur une région suffisamment grande au voisinage du point (x'_o, y'_o) du champ.
- On suppose alors que la pupille $p(x,y)$ est suffisamment grande pour que la tache de diffraction correspondante puisse être assimilée à une distribution de Dirac $\delta(u,v)$

Ces différentes hypothèses nous permettent d'écrire les amplitudes complexes des images directe et conjuguée reconstruites par l'hologramme par une simple transformation de Fourier sous la forme:

$$I_D(u,v) = \tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x',y')}$$

$$I_C(u,v) = \tilde{A}^*(-u,-v)\, P(u,v)\, e^{-j\phi(-u,-v,x',y')} \quad \text{(II-9)}$$

Pour que ces ondes puissent interférer, il faut que les "speckle" caractérisant les trois ondes soient identiques (ou suffisamment corrélés) en tout point. Cette condition est réalisée pour l'onde réelle et l'image directe. En ce qui concerne l'onde conjuguée il faut que l'on ait:

$$\tilde{A}^*(-u,-v) = \tilde{A}(u,v) \qquad \text{(II-10)}$$

Nous discuterons par la suite (chap. IV) le rôle des variations résiduelles de phase du diffuseur dans la visibilité des franges. Cette condition étant supposé réalisée les interférences entre les différentes ondes sont possibles.

2 - Caractérisation des systèmes d'interférence.

Si l'onde de référence est centrée sur la pupille et celle-ci utilisée en entier à l'enregistrement et à la reconstruction, on observe des interférences à trois ondes donnant un système complexe généralement difficile à exploiter (nous donnerons cependant un exemple d'une telle utilisation dans une application particulière aux aberrations de champ au chapitre V).

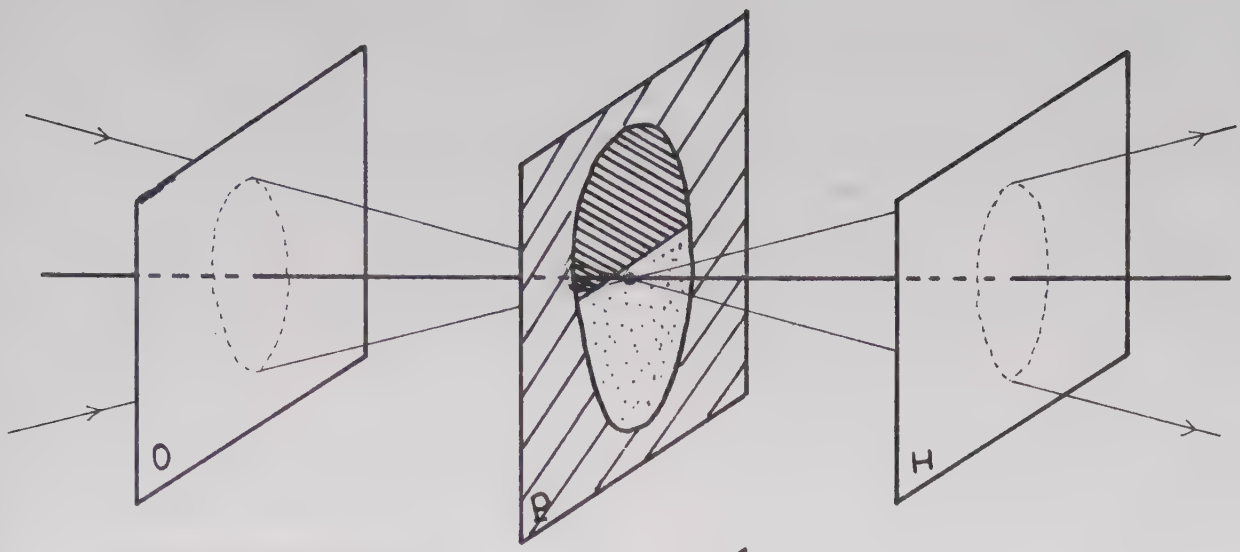
Il est généralement plus intéressant de séparer les plages où interfèrent pupille réelle-image directe d'une part, pupille réelle-image conjuguée d'autre part.

Cette condition est réalisée de la manière suivante: lors de l'enregistrement la moitié de la pupille est obturée en prenant soin de ne pas diaphragmer le faisceau directement transmis qui converge dans la pupille.

L'hologramme après développement est remis dans sa position d'enregistrement et on supprime l'obturation de la pupille qui est alors totalement éclairée.

L'image directe reconstruit la demi-pupille éclairée lors de l'enregistrement, l'image conjuguée, symétrique de l'image directe par rapport à l'onde de référence couvrel'autre demi-pupille: les deux images sont donc spatialement séparées (figure II-2)

- Enregistrement -



- Reconstruction -

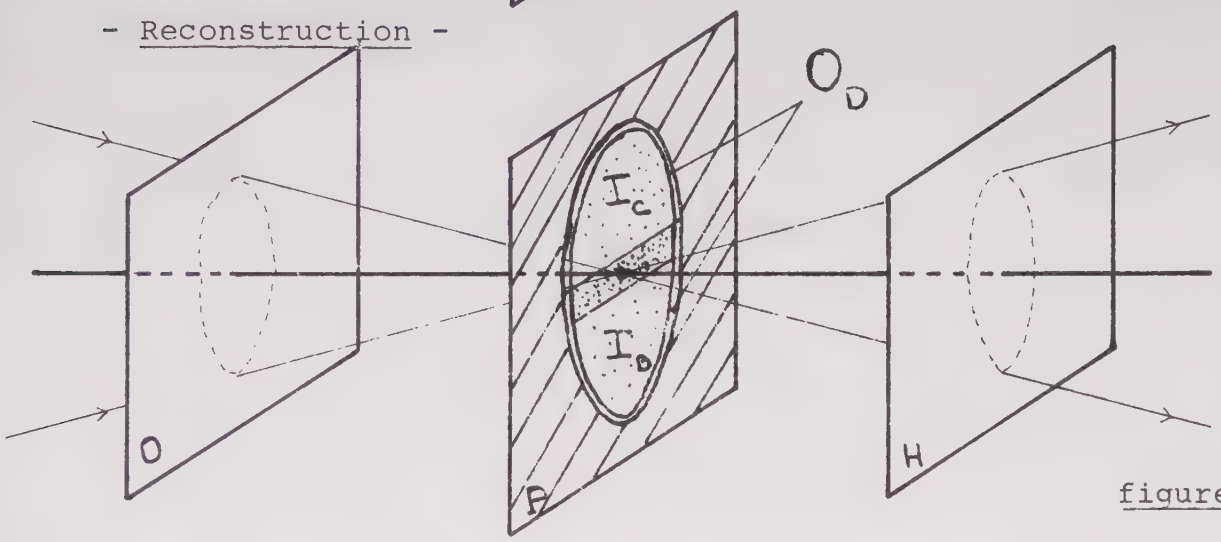


figure II-2

Sur la plage I_D correspondant à l'image directe on observe les interférences entre l'onde directe et l'onde diffusée d'amplitudes respectives O_D et I_D(II-8,9). La plaque étant remise dans sa position d'enregistrement les termes de phase sont identiques: on observe donc une teinte plate.

Sur la plage I_C les interférences sont caractéristiques de l'équation :

$$\phi(u,v,x',y') + \phi(-u,-v,x',y') = C^{te}$$

Ces interférences caractérisent le double des aberrations paires en u,v

$$2\,\phi_p(u,v,x',y') = C^{te} \qquad \text{(II-11)}$$

L'expression du terme de phase du aux aberrations est (15):

$$\phi(u,v,x',y') = a(u^2+v^2)^2 + b(ux'+vy')(u^2+v^2)$$
$$+ c(u^2+v^2)(x'^2+y'^2) + d\left[(u^2-v^2)(x'^2-y'^2) + 4uvx'y'\right]$$
$$+ e\left[(x'^2+y'^2)(ux'+vy')\right] + \pi\Delta\varepsilon(u^2+v^2) \quad \text{(II-12)}$$

Les différents coéfficients: a, b, c, d, e et ε représentent respectivement: l'aberration sphérique, la coma, la courbure, l'astigmatisme, la distorsion et le défaut de mise au point. (15)

Au centre du champ (x'= y' = 0) on observe l'aberration sphérique et le défaut de mise au point qui sont caractérisés par des anneaux du quatrième et du deuxième degré.

Si l'on opère la diaphragmation en un point quelconque du champ les anneaux se déforment à cause de la présence d'astigmatisme. De plus on observe une décorrélation directement lié au point de filtrage dans le champ, cette décorrélation entre l'onde réelle et l'image conjuguée reconstruite par l'hologramme entraine une baisse de visibilité et une délocalisation des franges d'interférences.

Notons que le système d'interférences double des aberrations paires est identique à celui qui peut-être observé dans le plan de Fourier de la plaque pour un enregistrement en une pose à pupille entière (figure II-3).

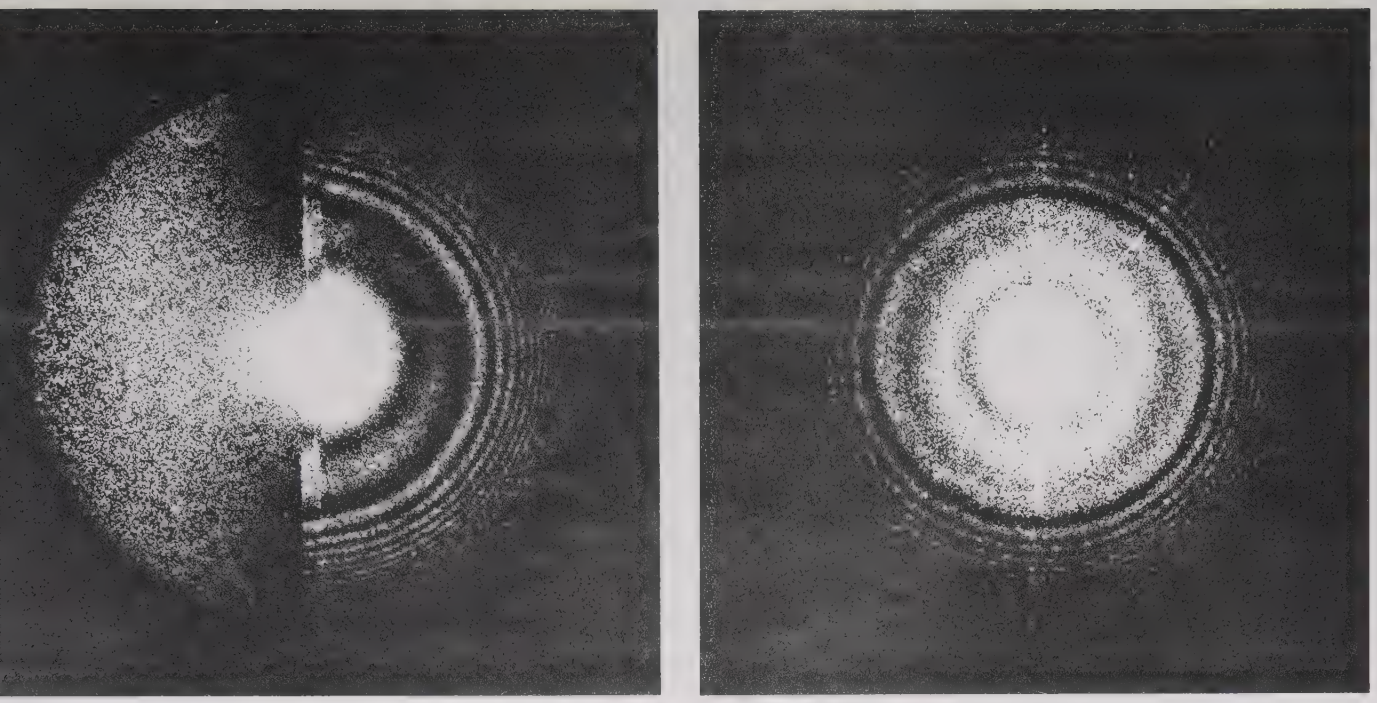


figure II-3

Nous pouvons admettre que la baisse de visibilité est dans ce cas identique à celle que l'on observe dans le cas d'une remise en place de la plaque photographique. Nous proposons par ailleurs un calcul théorique permettant d'obtenir la visibilité et la localisation des franges dans ce cas particulier. Cette étude théorique ainsi que les résultats expérimentaux obtenus seront traités dans le chapitre IV.

3 - Applications aux déplacements.

L'hologramme que nous avons enregistré contient des informations sur les aberrations du système lors de l'enregistrement. Nous allons étudier dans cette partie les différentes possibilités offertes en temps réel par ce système; nous discuterons dans chaque cas les baisses de visibilité qui peuvent intervenir. Une application importante est l'étude des déplacements latéraux et longitudinaux. Nous supposerons dans cette étude que l'hologramme a été enregistré avec un défaut de mise au point notable, au centre du champ, le double des aberrations paires est alors un système d'anneaux de Newton centrés sur la pupille, si l'on admet que les autres aberrations sont négligeables.

1) Déplacements latéraux.

L'objet ou la plaque subissant une translation dans leur plan, dans la pupille cela se traduit par un terme de phase linéaire par rapport à la direction du déplacement.

L'amplitude complexe dans le plan de la pupille devient:

$$\tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{2j\pi u x_0}\, e^{j\phi(u,v,x',y')} \qquad \text{(II-13)}$$

le déplacement ayant la valeur x_0 dans la direction parallèle à Ou
Les amplitudes des images directe et conjuguée reconstruites par l'hologramme étant données par (II-9)

$$I_D(u,v) = \tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v,x',y')}$$

$$I_c(u,v) = \tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{-j\phi(-u,-v,x',y')}$$

Nous appellerons plage directe la demi-pupille sur laquelle sont réalisées les interférences entre onde réelle et image directe, la plage conjuguée étant celle des interférences entre l'onde réelle et l'image conjuguée.
Sur la plage directe les interférences sont caractérisées en intensité par :

$$\left| 1 + e^{2j\pi u x_0} \right|^2$$

Cette expression représente des franges rectilignes dont le pas est inversement proportionnel à la grandeur du déplacement, la direction de ce déplacement étant perpendiculaire à la direction des franges.
Sur la plage conjuguée les interférences sont caractérisées en intensité par :

$$\left| e^{2j\pi u x_0}\, e^{j\phi(u,v,x',y')} + e^{-j\phi(-u,-v,x',y')} \right|^2$$

C'est à dire :

$$1 + \cos\left(2\phi_p(u,v,x',y') + 2\pi u x_0\right) \qquad \text{(II-14)}$$

Dans le cas d'un défaut de mise au point et l'aberration sphérique étant négligeable

$$\phi_p(u,v,x',y') = \pi d\varepsilon (u^2+v^2) \qquad \text{(II-15)}$$

L'expression (II-14) s'écrit:

$$1 + \cos\left(2\pi d\varepsilon (u^2+v^2) + 2\pi u x_o \right)$$

Les anneaux de défaut de mise au point seront donc décentrés angulairement de la valeur $(-x_o/\varepsilon)$ suivant la direction Ou
Ce décentrage est du signe de x_o, ou de signe contraire suivant le signe de ε . A partir de l'utilisation simultanée de ces deux plages il est donc possible de déterminer la grandeur, la direction et le sens du déplacement.
L'utilisation de ces deux plages permet donc d 'obtenir une information qui, en interférométrie "speckle", est généralement absente: le sens du déplacement.
Nous donnons les résultats expérimentaux pour deux déplacements de signes opposés sur la figure II-4. Les fonctions "speckle" sont identiques, on n'observe pas de baisse de visibilité même en présence d'un déplacement transversal.

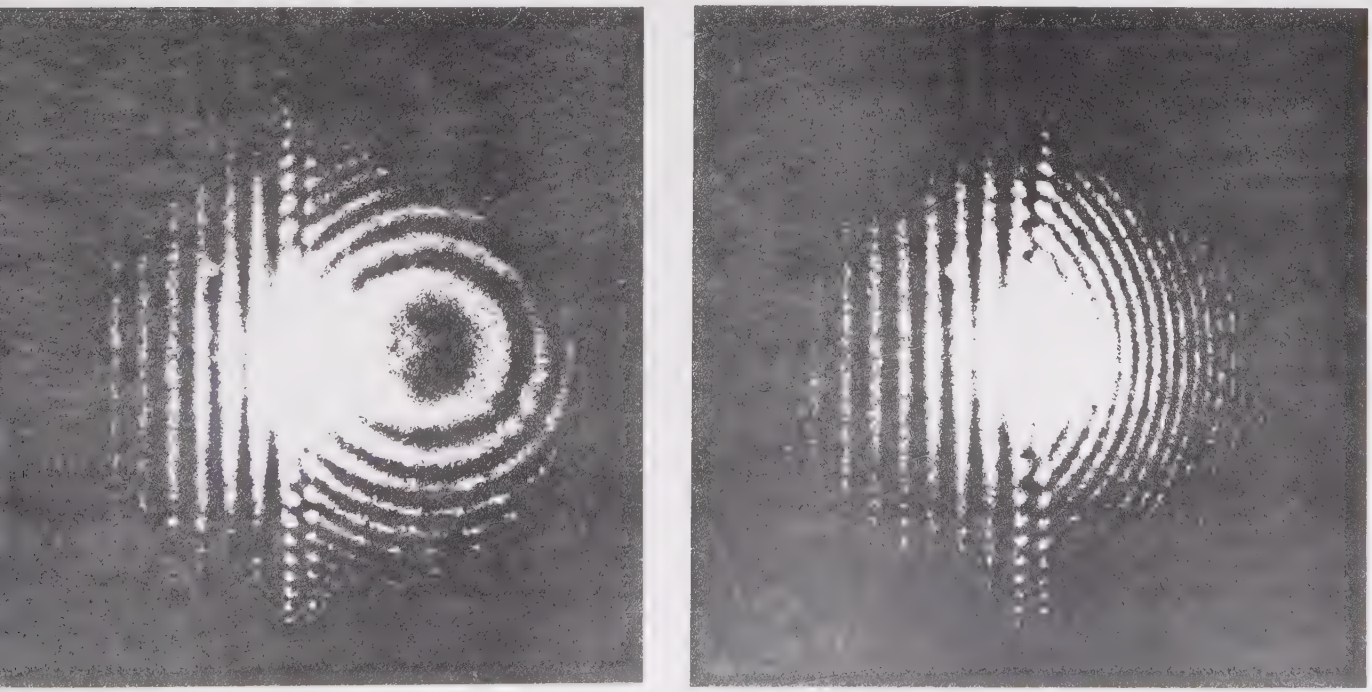


figure II-4

2) Déplacements longitudinaux

a) Détermination du plan de meilleure mise au point.

Dans le cas du montage télécentrique la pupille est à l'infini les demi-pupilles images directe et conjuguée reconstruites par l'hologramme possèdent la même répartiion "speckle" même si la plaque a subi une translation longitudinale.

On peut en effet montrer que si l'on réalise un déplacement longitudinal $\mathcal{E}'$, de la plaque ou de l'objet, seule la fonction de phase affectant la pupille est modifiée. Les anneaux qui apparaissent sur la plage directe sont caractéristiques de ce déplacement:

$$\pi \lambda \mathcal{E}' (u^2 + v^2)$$

Sur la plage conjuguée le système d'anneaux devient alors:

$$\pi \lambda (2\mathcal{E} + \mathcal{E}')(u^2 + v^2)$$

$\mathcal{E}$ étant le défaut de mise au point lors de l'enregistrement.

Nous nous placerons alors dans le plan de mise au point en déplaçant hors du plan, la plaque photographique de

$$\mathcal{E}' = -\mathcal{E}$$

Le système d'anneaux de la plage directe sera alors caractérisé par :

$$-\pi \lambda \mathcal{E} (u^2 + v^2) = C^{te}$$

sur la plage conjuguée:

$$+\pi \lambda \mathcal{E} (u^2 + v^2) = C^{te}$$

Les deux systèmes d'anneaux observés ont donc même courbure, le signe négatif correspond à des ordres d'interférences de signes opposés.

On vérifie que la condition d'égalité de courbure n'est réalisée que lorsqu'on est dans le plan de mise au point:

L'équation caractéristique est :

$$2\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \pm \mathcal{E}'$$

La solution $\mathcal{E}' = -\mathcal{E}$ correspond au plan de meilleure mise au point, pour l'autre solution $\mathcal{E} = 0$, les anneaux observés par translation longitudinale de la plaque ont toujours la même courbure, on a alors la possiblité de vérifier que le défaut de mise au point

à l'enregistrement était nul (figure II-5)

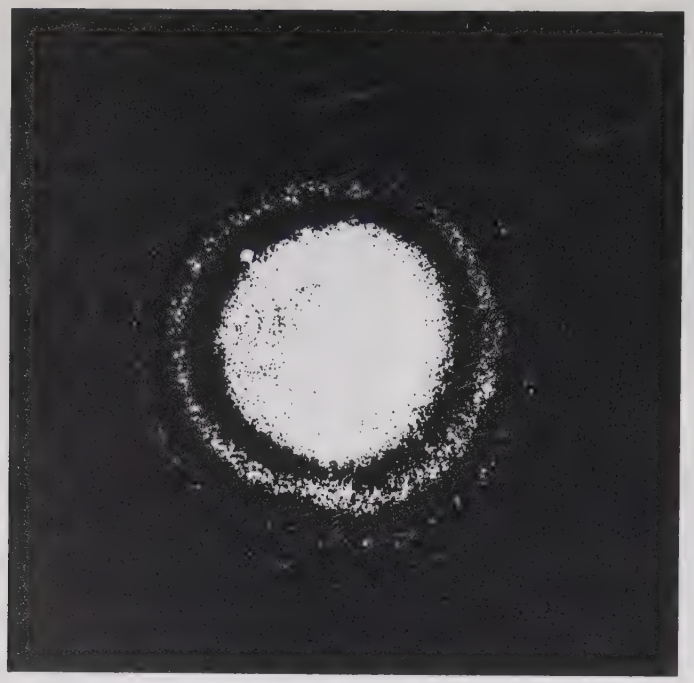


figure II-5

Il est également possible de déterminer la valeur du défaut de mise au point en compensant, par un déplacement mesurable de l'hologramme, le double du défaut de mise au point de la plage conjuguée: on obtient alors sur la plage directe les anneaux caractérisant le double du défaut de mise au point à l'enregistrement, sur la plage conjuguée on observe la teinte plate. Le système observé sur les deux plages est donc symétrique de celui obtenu lors de la remise en place exacte de la plaque (figure II-6)

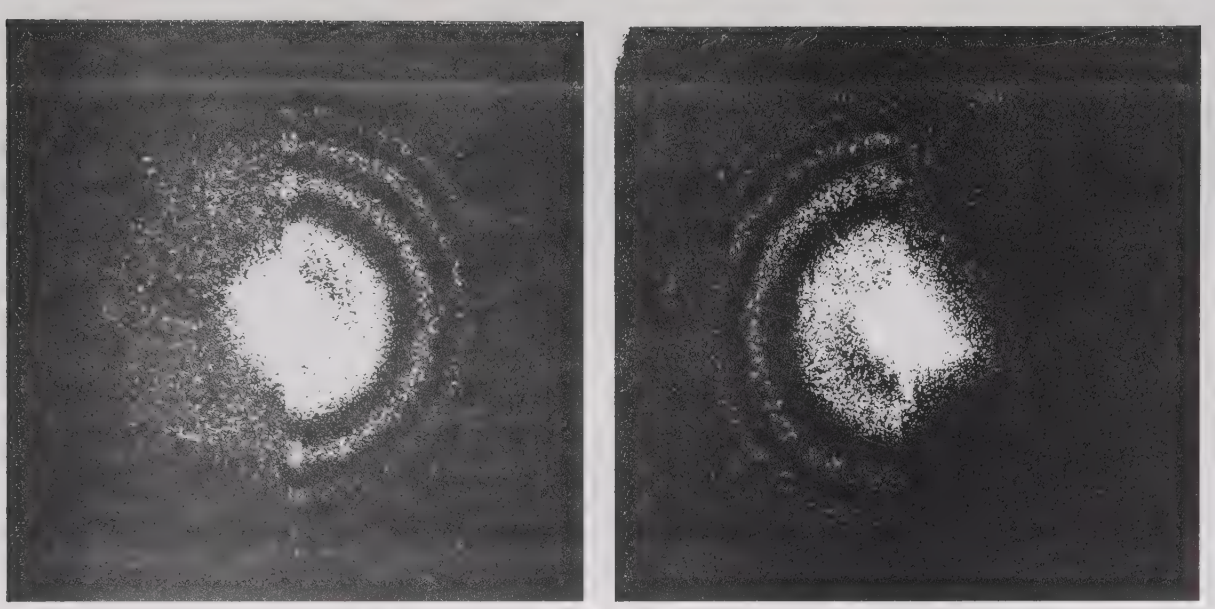


figure II-6

Lorsque le défaut de mise au point à l'enregistrement est faible, il n'est pas possible d'observer les anneaux centrés à l'intérieur de la pupille. Pour repérer l'égalité de courbure au voisinage du plan de mise au point il est utile d'introduire un déplacement latéral de l'hologramme qui fait alors intervenir un terme de phase linéaire dans la pupille. L'égalité de courbure sur les deux plages est alors plus facilement réalisable.
La figure II-7 caractérise un déplacement de 20 µm de part et d'autre du plan de mise au point. Un défaut de mise au point de 20 µm pour une ouverture de f/5 est donc décelable.

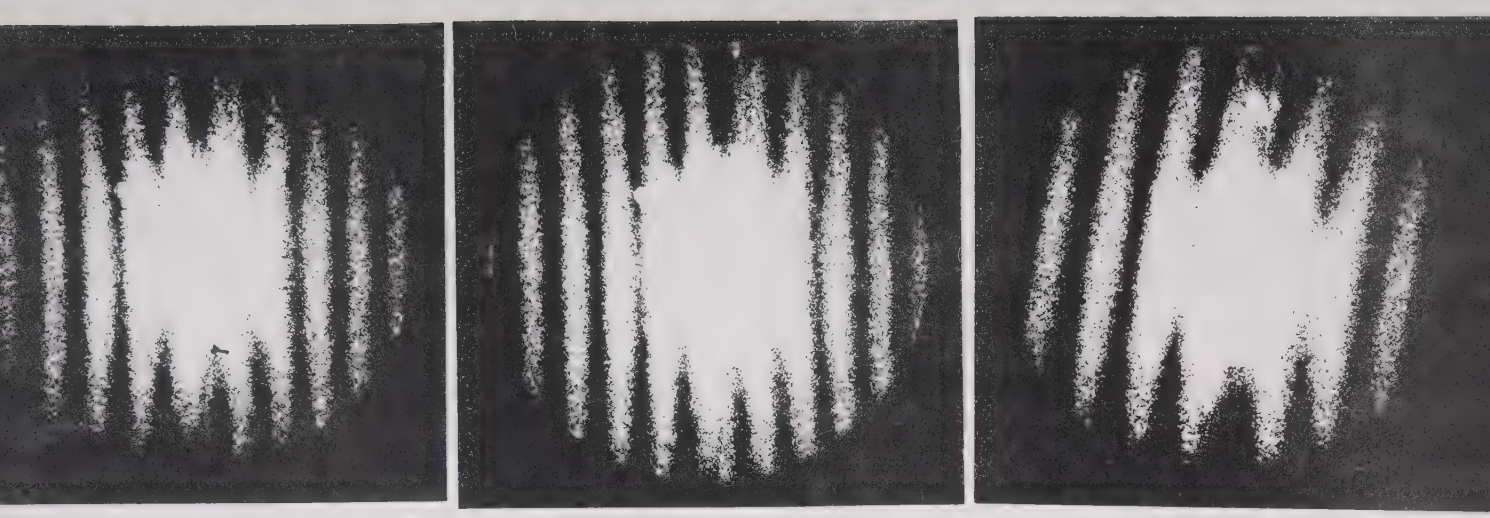


figure II-7

b) Détermination de déplacements longitudinaux

Un déplacement de la plaque photographique par rapport au plan de remise en place exacte fera apparaitre sur la plage directe des anneaux caractéristiques de la grandeur du déplacement. Comme dans le cas des déplacements latéraux l'utilisation de la plage conjuguée permet de déterminer, sous certaines conditions, le sens du déplacement.

La grandeur du déplacement est déterminée directement par l'interfrange, ou par le nombre d'anneaux observés sur la demi-pupille de la plage directe.

Dans le cas où le déplacement à contrôler reste supérieur, en valeur absolue, au défaut de mise au point à l'enregistrement le nombre d'anneaux est inférieur ou supérieur au nombre d'anneaux sur la plage conjuguée suivant que le déplacement est de même signe ou de signe contraire à celui du défaut de mise au point à l'enregistrement.

Le nombre d'anneaux sur les deux plages est respectivement proportionnel à :

$|2\varepsilon + \varepsilon'|$ sur la plage conjuguée

$|\varepsilon'|$ sur la plage directe

Si $|\varepsilon'| > |\varepsilon|$ le nombre d'anneaux sur la plage directe (N_D) et sur la plage conjuguée (N_C) permet de déterminer le signe de pris par rapport à la position de remise en place exacte:

$N_C < N_D$ ε' et ε de signes contraires

$N_C > N_D$ ε' de même signe que ε

N_C et N_D pouvant aussi être les rayons respectifs des n-ième anneaux sur les demi-pupilles des plages conjuguée et directe. Pour des déplacements plus faibles, $|\varepsilon'| < |\varepsilon|$, le nombre d'anneaux sur la plage conjuguée est toujours supérieur à celui de la plage directe. Le signe de ε' peut être relié à la variation de N_C,

- si N_C augmente, le déplacement ε' est de même signe que ε
- si N_C diminue ε' et ε sont de signes contraires.

La méthode doit donc être adaptée au problème pratique posé, on peut, suivant la gamme et le mode de déplacement, opérer avec un défaut de mise au point plus ou moins grand.

4 - Etude de la visibilité des franges en présence d'un déplacement hors plan.

Lorsque la pupille est à l'infini, la fonction "speckle" dans la pupille n'est pas modifiée par un déplacement longitudinal de l'objet ou de l'hologramme, mais introduit simplement un terme de phase. Cependant une baisse de visibilité peut-être observé lorsque la pupille n'est pas à l'infini par rapport au plan image (ou objet). Nous nous placerons dans le cas où il n'y a pas de défaut de mise au point à l'enregistrement et de plus où le système est parfait. L'influence des aberrations sur la visibilité des franges sera étudiée par la suite dans le chapitre V.

1) Enregistrement de l'hologramme de la pupille à distance finie.

L'objet est un diffuseur d'amplitude dont nous supposons les dimensions infinies. Le problème sera traité à une dimension pour simplifier les calculs, la généralisation étant immédiate.

L'objet, dont la transparence est 1 + A(x), est éclairé par une onde cohérente qui converge dans le plan de la pupille objet. La figure II-8 donne les notations utilisées.

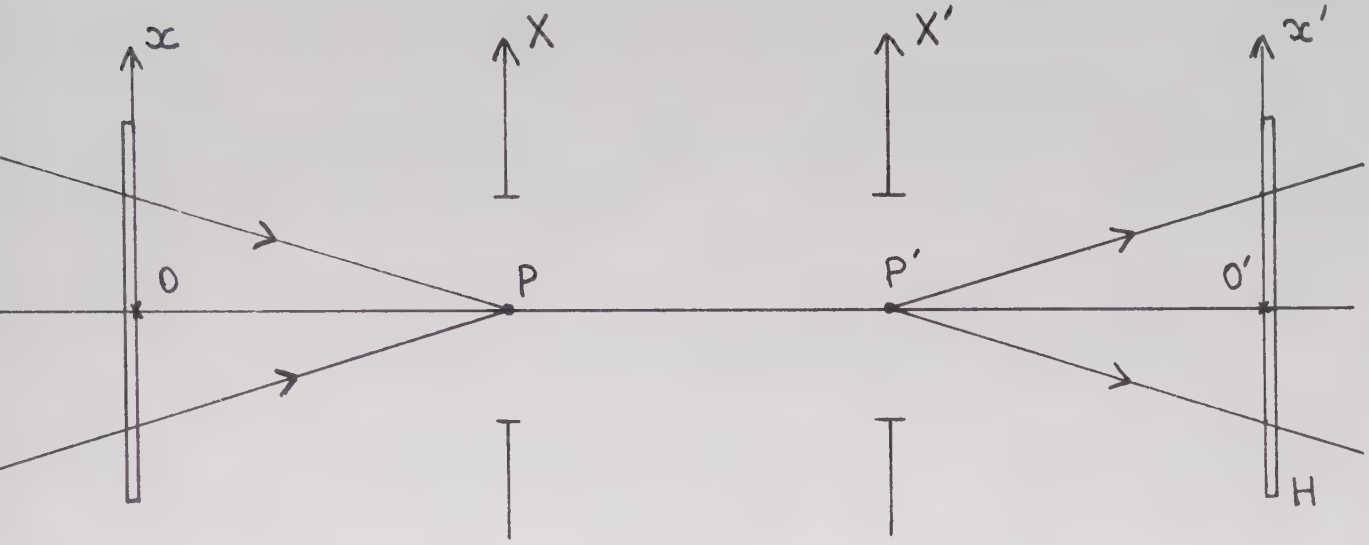


figure II-8

L'amplitude dans le plan pupille objet s'écrit:

$$\left[\delta(X) + \tilde{A}\left(\frac{X}{\lambda \cdot OP}\right)\right] \cdot e^{j\frac{\pi X^2}{\lambda OP}}$$

$\tilde{A}\left(\frac{X}{\lambda OP}\right)$ est la transformée de Fourier de A(x)

On peut montrer en utilisant les propriétés de conjugaison des éléments optique successifs que l'amplitude complexe dans le plan pupille image devient:

$$\left[\delta(X') + \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda O'P'}\right)\right] P(X') \, e^{j\frac{\pi X'^2}{\lambda OP'}}$$

P (X') caractérisant le filtrage effectué au niveau de la pupille
On obtient alors dans le plan image la répartition d'amplitude:

$$\left\{1 + \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda O'P'}\right) \cdot P(X') \cdot e^{-2j\pi \frac{X'x'}{\lambda P'O'}} dX'\right\} e^{-j\frac{\pi x'^2}{\lambda P'O'}}$$

La plaque photographique placée dans le plan image enregistre l'intensité reçue, la transparence en amplitude de l'hologramme après développement est:

$$1 + \mathcal{O}_D(x') + \mathcal{O}_D^*(x')$$

avec

$$\mathcal{O}_D(x') = \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda O'P'}\right) \cdot P(X')\, e^{-2j\pi \frac{X'x'}{\lambda \cdot P'O'}} \qquad \text{(II-16)}$$

2) Reconstruction holographique de la pupille.

Le montage d'enregistrement n'ayant pas subi de transformation l'hologramme est alors placé dans le plan de O", au voisinage de O' tel que O'O" = ε (figure II-9)

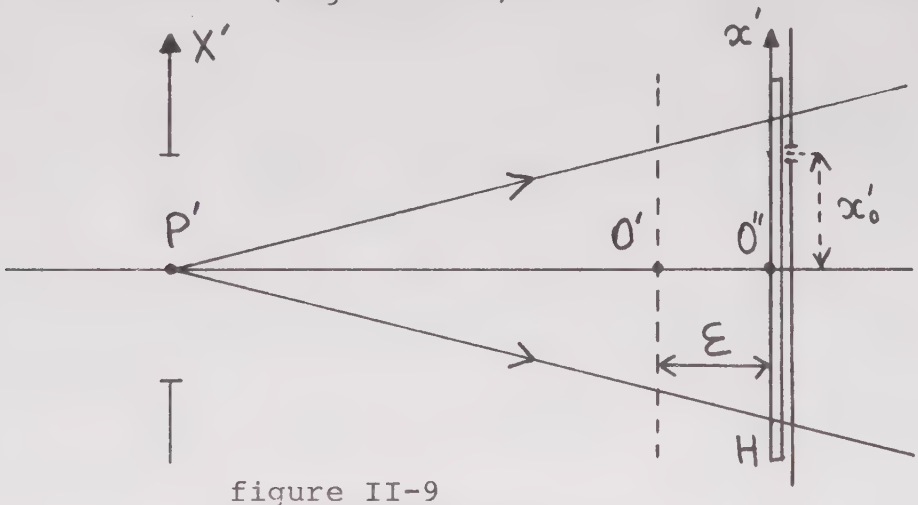


figure II-9

L'hologramme reconstruit deux images dans le plan de la pupille Nous allons étudier la visibilité des franges obtenues en faisant interférer l'image directe reconstruite par l'hologramme et la pupille réelle du système.

On diaphragme sur la plaque photographique, au voisinage du point x'_o, par la pupille définie par $p(x'-x'_o)$. L'amplitude de l'image directe reconstruite par cet élément d'hologramme est :

$$A_R(X'') = e^{j\frac{\pi X''^2}{\lambda O''P'}} \int \mathcal{O}_D(x')\, p(x'-x'_o)\, e^{-2j\pi \frac{x'X''}{\lambda O''P'}} dx' \qquad \text{(II-17)}$$

L'amplitude complexe diffusée par l'objet à travers la pupille $P(x' - x'_o)$ centrée en x'_o est:

$$A_D(X'') = \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda O'P'}\right) P(X') e^{j\frac{\pi X'^2}{\lambda O'P'}} e^{j\frac{\pi (X'-x')^2}{\lambda P'O''}} p(x'-x'_o) e^{j\frac{\pi (x'-X'')^2}{\lambda O''P'}} dX'\,dx'$$

(II-18)

avec $P'O'' = P'O' + O'O'' = D + \varepsilon$

$$\frac{1}{O'P'} - \frac{1}{O''P'} = -\frac{\varepsilon}{D^2}$$

Les amplitudes diffusée et reconstruite deviennent alors:

$$A_R(X'') = e^{-j\frac{\pi X''^2}{\lambda(D+\varepsilon)}} \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda D}\right) P(X') p(x'-x'_o) e^{-2j\pi\frac{X'x'}{\lambda D}} e^{+2j\frac{\pi X''x'}{\lambda(D+\varepsilon)}} dx'\,dX'$$

$$A_D(X'') = e^{-j\frac{\pi X''^2}{\lambda(D+\varepsilon)}} \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda D}\right) P(X') p(x'-x'_o) e^{-2j\pi\frac{X'^2\varepsilon}{\lambda D^2}} e^{+2j\pi\frac{(X'-X'')x'}{\lambda(D+\varepsilon)}} dx'\,dX'$$

On effectue l'intégration sur la pupille centrée en faisant le changement de variable:

$$x'' = x' - x'_o$$

Si de plus on pose :

$$\tilde{p}(u) = \int p(x)\, e^{-2j\pi u x}\, dx$$

(II-19)

Les amplitudes de l'imagedirecte et de la pupille réelle deviennent alors :

$$A_R(X'') = e^{-j\frac{\pi X''^2}{\lambda(D+\varepsilon)}} \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda D}\right) P(X') \tilde{p}\left(\frac{X'}{\lambda D} - \frac{X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right) e^{-2j\pi\frac{x'_o}{\lambda}\left(\frac{X'}{D} - \frac{X''}{D+\varepsilon}\right)} dX'$$

$$A_D(X'') = e^{-j\frac{\pi X''^2}{\lambda(D+\varepsilon)}} \int \tilde{A}\left(\frac{X'}{\lambda D}\right) P(X') \tilde{p}\left(\frac{X-X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right) e^{-j\frac{\pi\varepsilon X^2}{\lambda D^2}} e^{-2j\frac{\pi x'_o(X'-X'')}{\lambda(D+\varepsilon)}} dX'$$

(II-20)

3) Etude de la visibilité des franges.

On montre que la visibilité des franges est donnée par l'équation:

$$V = \frac{2M}{\langle |A_D|^2 \rangle + \langle |A_R|^2 \rangle} \qquad \text{(II-21)}$$

avec $M = |\langle A_R A_D^* \rangle|$

On étudiera d'abord $\langle A_R A_D^* \rangle$

$$A_R A_D^* = \int P(X_1') \tilde{A}^*\left(\frac{X_1'}{\lambda D}\right) \tilde{P}^*\left(\frac{X_1' - X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right) \cdot e^{+2j\frac{\pi x_0'(X_1' - X'')}{\lambda(D+\varepsilon)}} e^{+j\frac{\pi \varepsilon X_1'^2}{\lambda D^2}}$$
$$P(X_2') \tilde{A}\left(\frac{X_2'}{\lambda D}\right) \tilde{P}\left(\frac{X_2'}{\lambda D} - \frac{X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right) e^{-2j\frac{\pi x_0'}{\lambda}\left(\frac{X_2'}{D} - \frac{X''}{D+\varepsilon}\right)} dX_1' dX_2'$$

Le seul terme aléatoire est celui qui caractérise l'amplitude du "speckle" dans la pupille; le rayon de corrélation est donné par les dimensions de l'objet que l'on peut supposer très grandes par rapport au rayon du diaphragme P sur l'hologramme, on peut admettre:

$$\left\langle \tilde{A}^*\left(\frac{X_1'}{\lambda D}\right) \tilde{A}\left(\frac{X_2'}{\lambda D}\right) \right\rangle = \delta(X_1' - X_2') \qquad \text{(II-22)}$$

L'expression devient alors avec $P^2(X') = P(X')$

$$\langle A_R A_D^* \rangle = \int \tilde{P}^*\left(\frac{X' - X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right) \tilde{P}\left(\frac{X'}{\lambda D} - \frac{X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right) P(X') e^{+j\frac{\pi \varepsilon X'^2}{\lambda D^2}} e^{+2j\pi \frac{\varepsilon X' x_0'}{\lambda D^2}} dX' \qquad \text{(II-23)}$$

La transformée de Fourier à une dimension $\tilde{P}(u)$ de la fonction pupille P (x) de largeur 2a est :

$$\tilde{P}(u) = \text{sinc} \qquad \text{(II-24)}$$

La fonction $\tilde{P}^2(u)$ est centrée en $u = 0$

$\tilde{P}^2\left(\frac{X' - X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right)$ est centrée en X' = X"

$\tilde{P}^2\left(\frac{X'}{\lambda D} - \frac{X''}{\lambda(D+\varepsilon)}\right)$ est centrée en $X' = X''\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right)$

La fonction $\tilde{P}(u)$ peut être considérée étroite, le changement de variable

$$\alpha = \frac{X' - X''}{(D+\varepsilon)} \qquad \text{(II-25)}$$

est donc réalisé avec $\alpha \ll 1$

On obtient alors:

$$X' = X'' + \alpha(D+\varepsilon)$$

$$\frac{X'}{D} - \frac{X''}{D+\varepsilon} = \alpha + \frac{\varepsilon}{D^2} X'' \qquad X'^2 = X''^2 + 2\alpha X''(D+\varepsilon)$$

La valeur moyenne intervenant dans la visibilité est:

$$\langle A_R A_D^* \rangle = e^{+j\frac{\pi\varepsilon}{\lambda D^2}(X''^2 - 2x'_o X'')} \times \int \tilde{P}^*(\alpha)\, \tilde{P}\left(\alpha + \frac{\varepsilon X''}{D^2}\right) P\left(X'' + \alpha(D+\varepsilon)\right) e^{+2j\pi\frac{\varepsilon}{\lambda D}(X'' - x'_o)\alpha}\, d\alpha \qquad \text{(II-26)}$$

La pupille P (X") étant large elle ne crée pas de diaphragmation on obtient alors:

$$\langle A_R A_D^* \rangle = P(X'')\, e^{+j\frac{\pi\varepsilon}{\lambda D^2}(X''^2 - 2x'_o X'')} \int \tilde{P}^*(\alpha)\, \tilde{P}\left(\alpha + \frac{\varepsilon X''}{D^2}\right) e^{+2j\frac{\pi\varepsilon(X'' - x'_o)\alpha}{\lambda D}}$$

Le terme de phase $+\frac{\pi\varepsilon}{\lambda D^2}(X''^2 - 2x'_o X'')$ représente les anneaux de Newton centrées en $X'' = x'_o$, caractéristiques du défaut de mise au point.

La visibilité de ces anneaux à l'intérieur de la pupille P(x") est donnée par l'expression :

$$\int \tilde{P}^*(\alpha)\, \tilde{P}\left(\alpha + \frac{\varepsilon X''}{D^2}\right) e^{+2j\pi\frac{\varepsilon(X'' - x'_o)\alpha}{\lambda D}}\, d\alpha \qquad \text{(II-27)}$$

Cette expression est la transformée de Fourier du produit de deux taches de diffraction décalées. L'expression II-27 est donc le produit de convolution des transformées de Fourier.

$\tilde{P}^{*}(\alpha)$ transformée de Fourier de $P(-x)$

$\tilde{P}\left(\alpha + \frac{\varepsilon X''}{\lambda D^2}\right)$ transformée de Fourier de $e^{2j\pi \frac{x X''}{\lambda D^2}} p(x)$

Le produit de convolution ainsi obtenu est :

$$\int p(-x)\, p\left((x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D} - x\right) e^{2j\pi \frac{\varepsilon X'' x}{\lambda D^2}}\, dx \qquad \text{(II-29)}$$

Le produit des deux pupilles décalées ainsi obtenu limite l'intégration entre $(x'_o - x'')\frac{\varepsilon}{D}$ $-a$ et a; la largeur de la pupille étant 2a, l'intégrale devient:

$$\int_{\left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right| - a}^{a} e^{2j\pi \frac{\varepsilon X'' x}{\lambda D^2}}\, dx$$

avec la condition $\left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right| < 2a$

L'expression de cette intégrale est

$$e^{j\pi \frac{\varepsilon^2 X''}{\lambda D^3}(x'_o - X'')}\, \frac{\sin \frac{\pi \varepsilon X''}{\lambda D^2}\left(2a - \left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|\right)}{\frac{\pi \varepsilon X''}{\lambda D^2}} \qquad \text{(II-30)}$$

La visibilité étant déterminée par le module de cette expression le terme de phase $\frac{\varepsilon^2 X''}{\lambda D^3}(x'_o - x'')$ n'intervient pas dans la visibilité, il s'ajoute au terme de défaut de mise au point mais il est négligeable devant lui.

4) Résultats et interprétation physique.

L'expression de la visibilité donnée par (II-30) peut également se mettre sous la forme :

$$V = \left[2a - \left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|\right] \operatorname{sinc} \frac{\varepsilon X''}{\lambda D^2}\left(2a - \left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|\right) \qquad \text{(II-31)}$$

L'expression obtenue pour la visibilité permet donc de montrer lorsque D est infini (cas du système télécentrique) que la visibilité est toujours égale à 1 comme nous l'avions indiqué au début de ce chapitre. Lorsque $\varepsilon = o$ (remise en place exacte) la visibilité est aussi égale à 1.

Dans le cas général, la fonction de visibilité est difficile à interpréter, le facteur $(2a - \left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|)$ définit une zone de visibilité non nulle en fonction de ε et de la position du diaphragme.

La zone de visibilité est centrée en $x'' = x'_o$, coordonnée au diaphragme sur l'hologramme, elle est définie par ses limites:

$$X'' = x'_o \pm 2a\frac{\varepsilon}{D} \qquad \text{(II-32)}$$

Pratiquement la plus forte visibilité pour X" donné est obtenue lorsque $x'_o = X''$, d'autre part elle est d'autant plus élevée que X" est plus petit.

L'expression (II-31) peut également s'écrire:

$$V = \left\{2a - \left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|\right\} \text{sinc}\,\frac{2\varepsilon a X''}{\lambda D^2}\left(1 - \left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|\right) \qquad \text{(II-33)}$$

Interprétation physique.

La baisse de visibilité peut s'expliquer par deux facteurs différents:

- Déplacement de la répartition "speckle" dans le plan de H.

L'onde diffusée directement par l'objet au voisinage de X" produit une certaine répartition "speckle" à la distance D au voisinage de x'_o. En première approximation on peut dire que cette répartition "speckle" se retrouve à la distance $(D+\varepsilon)$, décalée latéralement de $\left|(x'_o - X'')\frac{\varepsilon}{D}\right|$. Sur l'onde reconstruite par la source de référence à partir de l'hologramme, translatée de ε, cette même répartition "speckle" se retrouve centrée en x'_o.

Il y a donc déplacement du "speckle" de $\left|\frac{\varepsilon}{D}(x'_o - X'')\right|$ (figure II-10)

On pourra donc penser que la décorrélation est totale lorsque ce déplacement est égal au diamètre de la pupille utilisée sur l'hologramme d'où la mise en facteur du terme:

$$2a - \left|(X' - x'_o)\frac{\varepsilon}{D}\right|$$

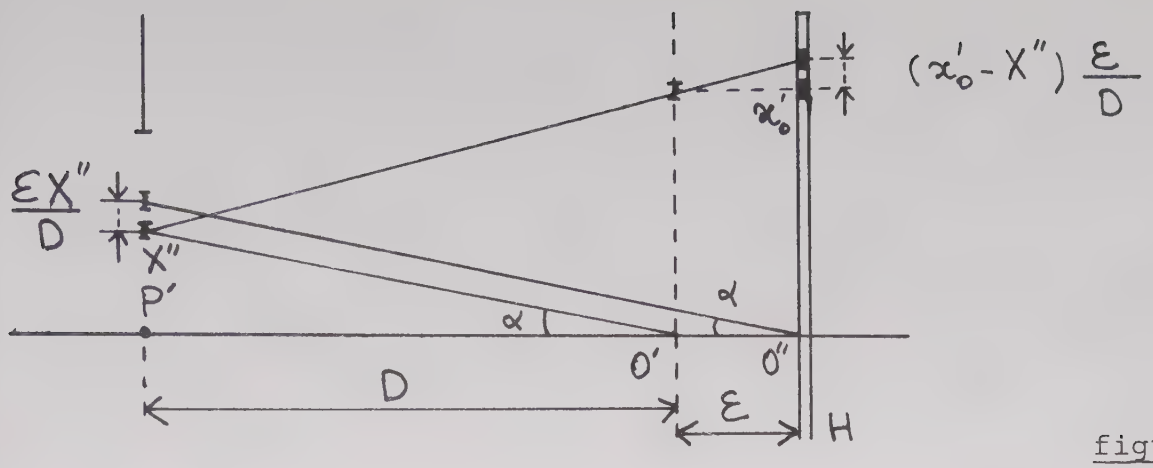


figure II-10

- Déplacement de la répartition "speckle" dans le plan de l'image holographique.

L'élément "speckle" reconstruit par l'hologramme au voisinage de X" se trouve décalé radialement de $\frac{\varepsilon X''}{D}$ par rapport au point enregistré. La décorrélation se trouve alors liée à la relation entre ce décalage et le rayon de la tache de diffraction $\lambda D/2a$

$$\frac{X''\varepsilon}{D} < \frac{\lambda D}{2a}$$

Donc $\frac{2\pi \varepsilon X'' a}{\lambda D^2} < \pi$ et on retrouve ainsi le premier zéro de la fonction sinc.

5 - Autres applications.

1) Plan image, courbure de champ.

Nous avons montré qu'il était possible de déterminer le défaut de mise au point à l'enregistrement, pour cela le filtrage sur la plaque photographique était effectué au centre du champ. En opérant la diaphragmation en un point quelconque du champ il est alors possible de déterminer en ce lieu un défaut de mise au point variable dans le champ. La variation de défaut de mise au point obtenue entre le centre et un point du champ nous permet donc de déterminer la position de l'image par rapport à la plaque photographique. Nous pouvons donc obtenir la courbure de champ mais aussi l'inclinaison entre les plans objet et image. L'information sur ces deux valeurs sera obtenue en mesurant le défaut de mise au point en deux endroits symétriques par rapport au centre du champ.

Le défaut de mise au point variable $\varepsilon(x)$ est défini par:

$$\varepsilon(x) = a x^2 + \alpha x + \varepsilon_o$$

avec a: coéfficient de courbure, relié à l'expression (II-12) par la relation $a = \frac{c}{\pi A}$

α : inclinaison entre les plans objet et image

ε_o: défaut de mise au point à l'enregistrement

La mesure de $\varepsilon(x)$ est réalisée en deux points symétriques du centre du champ: x_o et $-x_o$

Les valeurs des deux défauts de mise au point sont:

$$\begin{cases} \varepsilon(x_o) = a x_o^2 + \alpha x_o + \varepsilon_o \\ \varepsilon(-x_o) = a x_o^2 - \alpha x_o + \varepsilon_o \end{cases}$$

On obtient donc:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\varepsilon(x_o) - \varepsilon(-x_o)\right) \qquad \text{(II-34)}$$

$$\text{et} \quad a = \frac{1}{2x_o^2}\left(\varepsilon(x_o) + \varepsilon(-x_o) - 2\varepsilon_o\right)$$

La détermination du coéfficient de courbure a nécessite de connaitre la valeur du défaut de mise au point à l'enregistrement, qui est déterminé au centre du champ.

Pour pouvoir réaliser la mesure du défaut de mise au point dans le champ il est nécessaire que le système présente peu d'astigmatisme. En effet la mesure d'un défaut de mise au point est réalisée à partir d'un système d'anneaux de Newton, en présence d'astigmatisme, ces anneaux sont déformés, les mesures alors réalisées sont moins précises.

2) Aberrations différentielles.

L'étude en temps réel des franges caractéristiques de l'évolution du système peut être aussi utilisée pour déterminer les aberrations différentielles. Les expériences proposées à partir du même montage pour l'étude des aberrations différentielles utilisent un enregistrement photographique en deux poses (5,6). Nous allons voir qu'il est possible à partir de l'enregistrement de l'hologramme et de sa remise en place dans le montage d'obtenir les aberrations différentielles par un déplacement en temps réel de l'onde incidente.

L'enregistrement holographique est réalisé l'onde directement transmise convergeant dans le centre de la pupille ($u = o$, $v = o$). Lors de la reconstruction l'hologramme est remis dans la position d'enregistrement, l'onde de référence subit alors

une translation dans la pupille, par rotation de l'onde qui éclaire l'objet, elle converge alors dans la pupille en $(u = u_0, v = 0)$
Les amplitudes des images directe et conjuguée reconstruites par l'hologramme sont:

$$A_D(u,v) = \tilde{A}(u,v)\, P(u-u_0,v)\, e^{j\phi(u-u_0,v)}$$

$$A_c(u,v) = \tilde{A}(u,v)\, P(u-u_0,v)\, e^{-j\phi(u_0-u,v)} \qquad \text{(II-35)}$$

L'amplitude diffusée directement par l'objet étant:

$$\tilde{A}(u,v)\, P(u,v)\, e^{j\phi(u,v)}$$

L'enregistrement ayant été effectué la demi-pupille étant obturée, nous avons montré que les images reconstruites étaient séparées, l'onde diffusée directement interfère alors avec chacune des images
Les amplitudes complexes sont :

- sur l'image directe $\tilde{A}(u,v)\left[e^{j\phi(u,v)} + e^{j\phi(u-u_0,v)}\right]$
- sur l'image conjuguée $\tilde{A}(u,v)\left[e^{j\phi(u,v)} + e^{-j\phi(u_0-u,v)}\right]$

La répartition en intensité est alors:

$$|\tilde{A}(u,v)|^2\left[1 + \cos\left(\phi(u,v) - \phi(u-u_0,v)\right)\right]$$

et

$$|\tilde{A}(u,v)|^2\left[1 + \cos\left(\phi(u,v) + \phi(u-u_0,v)\right)\right] \qquad \text{(II-36)}$$

Pour un décentrage de l'onde suffisamment faible on peut écrire:

$$\cos\left(\phi(u,v) - \phi(u-u_0,v)\right) = \cos\left(u_0 \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\right)$$

$$\cos\left(\phi(u,v) + \phi(u_0-u,v)\right) = \cos\left(2\phi_p(u,v) - u_0 \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\right) \qquad \text{(II-37)}$$

Sur la plage directe les interférences sont donc caractérisées par:

$$\cos\left[u_0 \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\right] = c^{te} \qquad \text{(II-38)}$$

On obtient donc sur la plage directe l'interférogramme différentiel des aberrations. Sur la plage conjuguée le système des franges double des aberrations paires se superpose au système différentiel.

L'obtention de l'interférogramme différentiel en temps réel est intéressant car il est possible d'adapter le terme de décentrage u_0 pour observer au mieux la différentielle des aberrations. Le terme de phase $\phi(u,v)$ dépend directement du point de filtrage sur l'hologramme. Au centre du champ on observe l'aberration différentielle de l'aberration sphérique et du défaut de mise au point qui sont respectivement des franges du 3ème ordre, du type de celle de coma, et des franges rectilignes. La figure II-11 montre la différentielle du système en présence d'aberration sphérique.

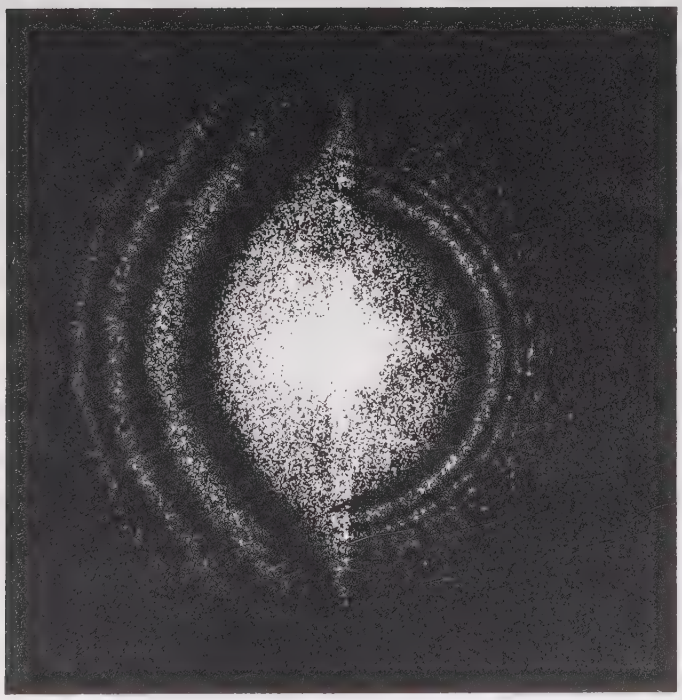


figure II-11

3) Variation de phase.

Si l'on introduit dans la pupille du système une lame de phase les interférences obtenues sur la plage directe caractériseront la variation de phase dans la pupille. On peut alors par un déplacement transversal de la plaque ajouter ou éliminer, en temps réel, des franges rectilignes. L'observation faite des franges caractérise la perturbation des franges rectilignes par la lame de phase introduite dans la pupille. Il est donc possible d'ajouter ce terme de franges rectilignes pour visualiser dans les meilleures conditions les franges équi phases. La figure II-12 montre une lame de verre à la teinte

plate et en présence de franges rectilignes; le système de franges observé sur la plage conjuguée étant plus complexe.

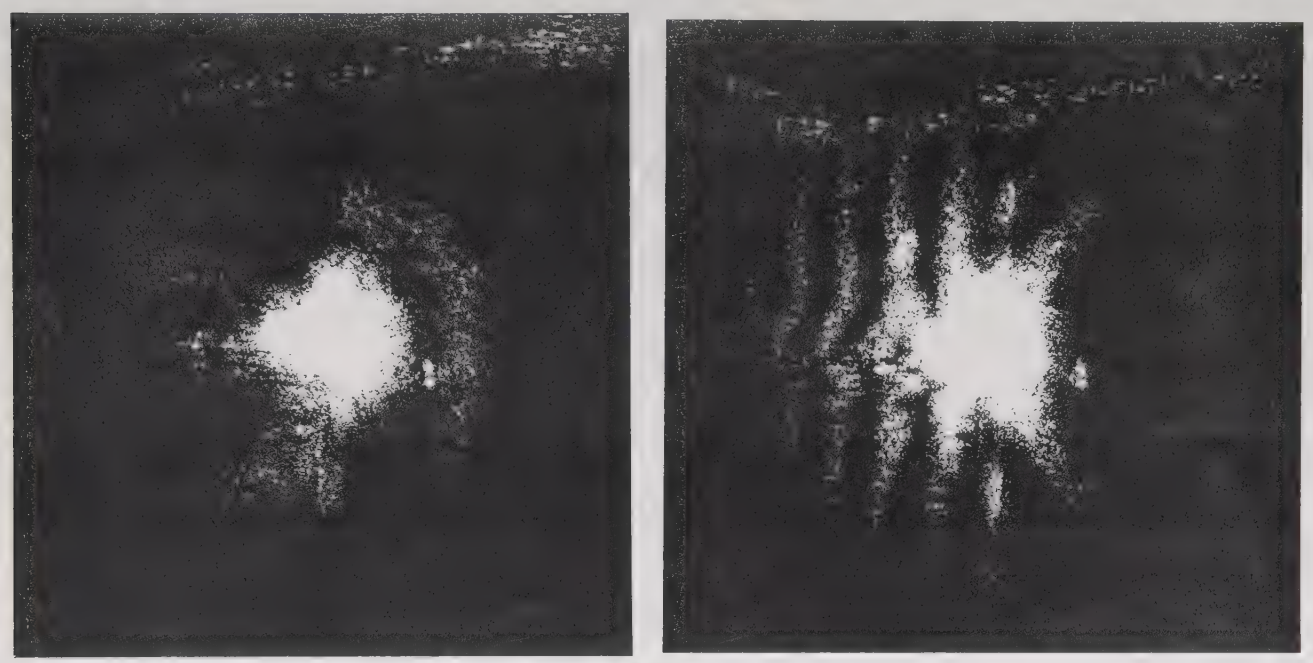


figure II-12

Il est également possible à partir du même montage de suivre des déformations du système optique, ces déformations étant visualisées par une variation de phase dans la pupille. La figure II-13 montre le résultat obtenu en inversant le sens d'un des objectifs du système. Les franges du 4ème degré visibles sur la plage directe sont caractéristiques de l'aberration sphérique.

figure II-13

CHAPITRE III

Etude du chromatisme d'un système optique (16)

L'expérience d'interférométrie holographique par photographie "speckle" que nous venons de présenter (chapitre II) nous permet d'étudier des déplacements. Nous nous proposons d'appliquer cette méthode à l'étude du chromatisme d'un système optique.

L'hologramme, enregistré à l'aide d'une onde cohérente de longueur d'onde λ_o , contient toutes les informations sur la position de l'image associée à cette longueur d'onde. Nous avons la possibilité de reconstruire l'hologramme de la pupille à l'aide d'une autre longueur d'onde λ , les interférences que nous obtiendrons en temps réel seront caractéristiques du déplacement de l'image dû au chromatisme.

1 - Rappels sur le chromatisme: chromatisme longitudinal et transversal (15)

Un point O situé sur l'axe du système donnera une image O_o pour la longueur d'onde λ_o , une image O_λ pour la longueur d'onde λ . Le chromatisme longitudinal sera caractérisé par la distance $O_o O_\lambda$, cette distance dépendra naturellement de la position de l'objet **O** (figure III-1)

Le chromatisme de grandissement est défini par la différence des grandeurs des deux images : Δx_g . On préférera définir une valeur plus caractéristique Δx_a chromatisme apparent, qui fait intervenir la position de la pupille de sortie. Le chromatisme apparent pourra être caractérisé à partir de la différence des angles sous lequels on voit, de la pupille de sortie les images associées aux différentes longueur d'onde.

Le système possèdera un achromatisme apparent si les images associées aux différentes longueurs d'onde sont alignées sur la droite passant par le centre de la pupille de sortie. Le choix de la position de la pupille apparait donc primordial pour réduire le chromatisme apparent. Dans les systèmes que nous avons

étudiés les aberrations chromatiques sont faibles, ce résidu d'aberrations chromatiques portant le nom de spectre secondaire.

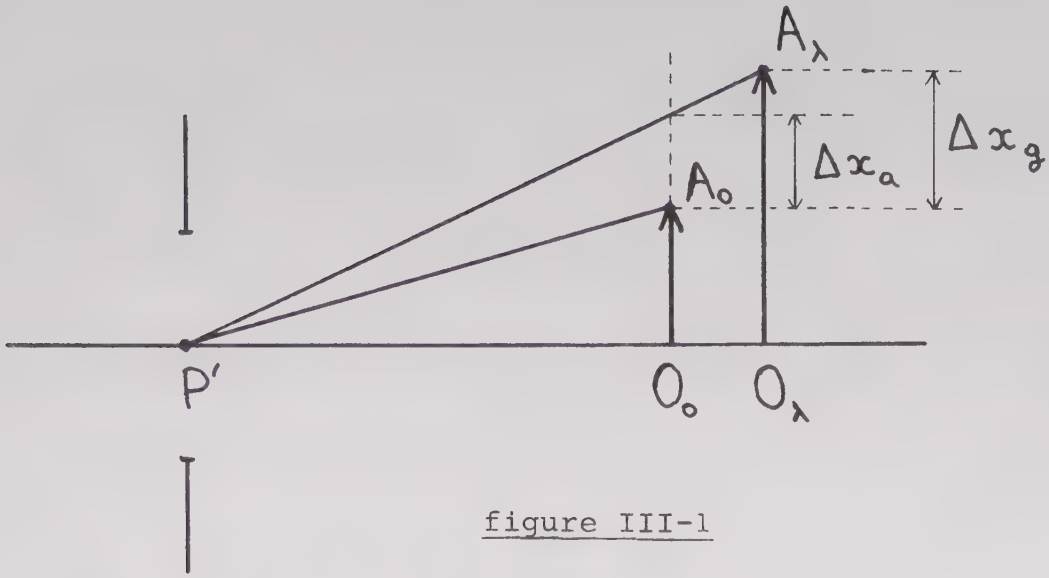


figure III-1

2 - Principe de l'expérience

1 - Enregistrement par une onde cohérente de longueur d'onde λ_o

Nous nous placerons dans le cas d'un système télécentrique (figure III-2), nous avons vu en II-4 que pour un système quelconque avec pupille à distance finie la forme des franges reste la même seule leur visibilité pouvant être modifiée. Dans le cas de ce système les passages plan objet-plan pupille et plan pupille-plan image se font par simple transformation de Fourier sans terme de phase supplémentaire.

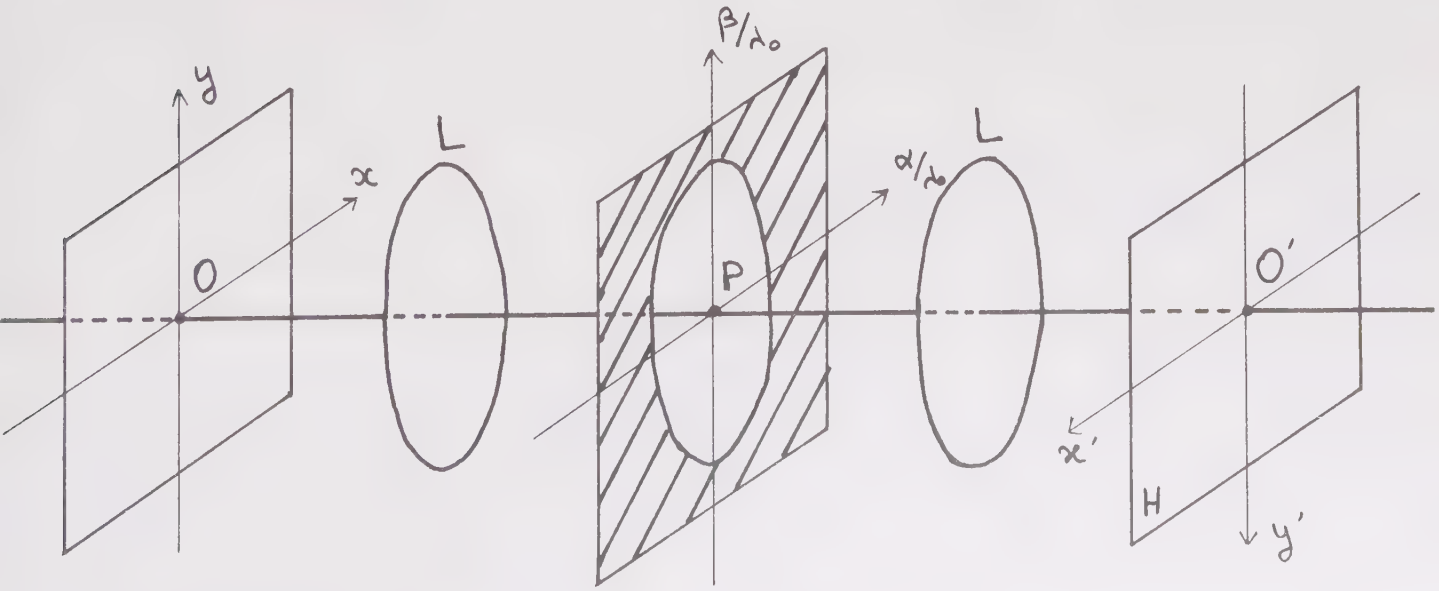


figure III-2

Le diffuseur d'amplitude, placé dans le plan objet, a pour transparence complexe $t(x,y)$ tel que:

$$t(x,y) = 1 + a(x,y) \qquad \text{(III-1)}$$

L'onde directement transmise par l'objet converge dans le plan de la pupille, la répartition d'amplitude dans ce plan est:

$$\delta\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) + \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) \qquad \text{(III-2)}$$

Les aberrations géométriques du système font intervenir un terme de phase $\phi_{\lambda_0}(\alpha, \beta)$ variable dans la pupille.
Ce terme de phase peut s'écrire:

$$\phi_{\lambda_0}(\alpha,\beta) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta_0(\alpha,\beta) \qquad \text{(III-3)}$$

avec

$\Delta_0(\alpha,\beta)$: longueur caractérisant l'écart aberrant par rapport à la surface d'onde.

La pupille crée une diaphragmation $P\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right)$ tel que

$$P\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) = 1 \quad \text{pour} \quad \alpha^2 + \beta^2 < \alpha_R^2$$
$$P\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha^2 + \beta^2 > \alpha_R^2 \qquad \text{(III-4)}$$

α_R étant l'ouverture angulaire de la pupille.

L'amplitude complexe à la sortie de la pupille est donc:

$$\left[\delta\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) + \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right)\right] P\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} \qquad \text{(III-5)}$$

Dans le plan image l'amplitude complexe devient:

$$1 + \int \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} P\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{\lambda_0}(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta$$

$$= 1 + a(x,y) \circledast \int e^{2j\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} P\left(\frac{\alpha}{\lambda_0}, \frac{\beta}{\lambda_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{\lambda_0}(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta$$

Le symbole $\circledast$ représente l'opération de convolution.
La plaque photographique haute-résolution plaçée dans le plan image du diffuseur d'amplitude enregistre l'intensité reçue.
Sa transparence complexe, après développement, s'écrit alors:

$$1 + T(x,y) + T^*(x,y)$$

avec

$$T(x,y) = a(x,y) \circledast \int e^{2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} P\left(\frac{\alpha}{d_0},\frac{\beta}{d_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{d_0}(\alpha x+\beta y)} d\alpha\, d\beta \qquad \text{(III-6)}$$

2) Restitution de l'hologramme par une onde cohérente de longueur d'onde λ

L'hologramme ainsi obtenu est remis dans sa position d'enregistrement. Deux images sont reconstruites dans le plan de la pupille, sur le même montage, par une onde cohérente de longueur d'onde différente λ

Dans le plan de la plaque photographique la transparence T(x,y) est un produit de convolution. En éclairant par une onde plane de longueur d'onde λ on obtiendra dans le plan de la pupille reconstruite le produit des transformées de Fourier:

$$I_D(\alpha',\beta') = \tilde{a}\left(\frac{\alpha'}{d},\frac{\beta'}{d}\right) \cdot F(\alpha',\beta') \qquad \text{(III-7)}$$

F (α', β') étant la transformée de Fourier de

$$\int P\left(\frac{\alpha}{d_0},\frac{\beta}{d_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} e^{2j\frac{\pi}{d_0}(\alpha x+\beta y)} d\alpha\, d\beta$$

$$F(\alpha',\beta') = \int P\left(\frac{\alpha}{d_0},\frac{\beta}{d_0}\right) e^{2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} e^{2j\frac{\pi}{d_0}(\alpha x+\beta y)} e^{-2j\frac{\pi}{d}(\alpha' x+\beta' y)} d\alpha\, d\beta\, dx\, dy$$

L'écart aberrant $\Delta(\alpha, \beta)$ dépend directement des coordonnées (x'y') de la plaque; si l'on place une pupille sur la plaque, en limitant une zone au voisinage de (x',y') on pourra alors supposer $\Delta(\alpha, \beta)$ indépendant de (x'y').

Nous supposerons comme dans le cas précédent (chapitre II) que l'intégration sur (x,y) donne:

$$\delta\left(\frac{\alpha}{d_0} - \frac{\alpha'}{d}\right)$$

On obtient alors:

$$F(\alpha', \beta') = P\left(\frac{\alpha'}{d}, \frac{\beta'}{d}\right) e^{2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0\left(\frac{d_0}{d}\alpha', \frac{d_0}{d}\beta'\right)} \qquad \text{(III-8)}$$

L'amplitude complexe de l'image directe, dans le plan de la pupille, s'écrit alors:

$$I_D(\alpha, \beta) = \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) P\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) e^{2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0\left(\frac{d_0}{d}\alpha, \frac{d_0}{d}\beta\right)} \qquad \text{(III-9)}$$

La transparence t(x,y) étant réelle, l'amplitude complexe $T^*(x,y)$ dans le plan image est:

$$T^*(x,y) = a(x,y) \circledast \int P\left(\frac{\alpha}{d_0}, \frac{\beta}{d_0}\right) e^{-2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0(\alpha,\beta)} e^{-2j\frac{\pi}{d_0}(\alpha x + \beta y)} d\alpha\, d\beta$$

L'amplitude complexe de l'image conjuguée $I_C(\alpha, \beta)$ reconstruite dans la pupille est:

$$I_C(\alpha, \beta) = \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) \cdot F^*(\alpha, \beta)$$

$$= \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) P\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) e^{-2j\frac{\pi}{d_0}\Delta_0\left(\frac{d_0}{d}\alpha, \frac{d_0}{d}\beta\right)} \qquad \text{(III-10)}$$

L'amplitude complexe diffusée directement, par l'objet, dans le plan de la pupille est:

$$O_D(\alpha, \beta) = \tilde{a}\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) P\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) \cdot e^{2j\frac{\pi}{d}\Delta(\alpha,\beta)} \qquad \text{(III-11)}$$

3) Caractérisation des systèmes d'interférence

Les répartitions des ondes "speckle" sur la pupille, sont identiques sur l'image directe, l'image conjuguée et l'onde diffusée directement : $\tilde{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$; ces trois ondes peuvent donc interférer entre elles.

Si lors de l'enregistrement on a pris soin d'obturer la moitié de la pupille, lors de la reconstruction les images directe et conjuguée seront séparées, les interférences seront alors réalisées entre:

- image directe et onde diffusée directement
- image conjuguée et onde diffusée directement

Les interférences sont caractérisées par les équations:

- sur la plage directe:

$$\frac{\Delta}{d}(\alpha, \beta) - \frac{\Delta_0}{d_0}\left(\frac{d_0}{d}\alpha, \frac{d_0}{d}\beta\right) = C^{te} \qquad \text{(III-12)}$$

- sur la plage conjuguée:

$$\frac{\Delta}{d}(\alpha, \beta) + \frac{\Delta_0}{d_0}\left(\frac{d_0}{d}\alpha, \frac{d_0}{d}\beta\right) = C^{te} \qquad \text{(III-13)}$$

Avec $\Delta(\alpha, \beta) = A(\alpha^2+\beta^2)^2 + B(\alpha x' + \beta y')(\alpha^2+\beta^2)$

$+ C\left[(\alpha^2+\beta^2)(x'^2+y'^2)\right] + D\left[(\alpha^2-\beta^2)(x'^2-y'^2) + 4x'y'\alpha\beta\right]$

$+ E(\alpha x' + \beta y')(x'^2+y'^2) + \frac{\mathcal{E}}{2}(\alpha^2+\beta^2)$

(III-14)

Les coefficients A,B,C,D,E et $\mathcal{E}$ caractérisant respectivement les aberrations géométriques: aberration sphérique, coma, courbure astigmatisme, distorsion et défaut de mise au point.

Indépendamment du chromatisme proprement dit, qui concerne un déplacement latéral et longitudinal de l'image d'un point en fonction de la longueur d'onde, cette expérience permet de mettre en évidence:

- des variations éventuelles des coefficients d'aberrations en fonction de la longueur d'onde.
- une interférométrie différentielle radiale des aberrations dû à l'expansion de la fonction $\Delta(\alpha, \beta)$ dans le rapport d_0/λ lorsqu'on passe

de la longueur d'onde λ_0 à la longueur d'onde λ

Nous supposerons d'abord ces effets négligeables pour traiter le problème du déplacement chromatique des images.

3 - Détermination du chromatisme du système.

1) Chromatisme longitudinal

Nous avons vu que le chromatisme longitudinal est caractérisé par la distance, sur l'axe du système, entre les images associées aux différentes longueurs d'onde. Nous représenterons donc ce terme par un défaut de mise au point variable avec la longueur d'onde que nous noterons ε_λ

On se placera donc sur l'axe du système (x'=o, y'=o) pour étudier le chromatisme longitudinal.

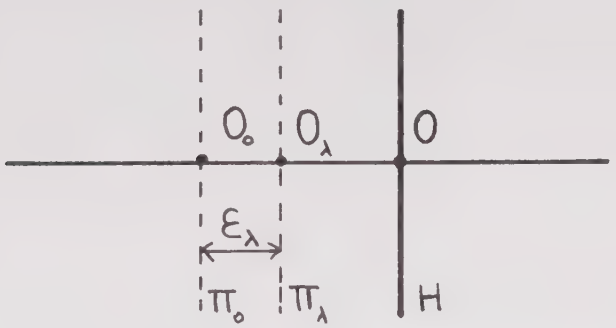


figure III-3

ε_λ représente, indépendamment de la position de l'hologramme H, la distance du plan de mise au point pour λ_0 au plan de mise au point pour λ (figure III-3)

$$\varepsilon_\lambda = \overline{O_0 O_\lambda} \qquad \text{(III-15)}$$

Système sans aberration, pas de défaut de mise au point à l'enregistrement : $\Delta_0(\alpha, \beta) = 0$

Les anneaux de Newton que nous observerons sur la plage directe et sur la plage inverse en changeant la longueur d'onde caractériseront directement le défaut de mise au point ε_λ dû au chromatisme longitudinal du système.
Il est possible en déplaçant longitudinalement, en temps réel, l'hologramme d'éliminer ces anneaux: la translation de la plaque déterminera directement la valeur ε_λ
Les anneaux sont identiques, aux aberrations près, sur la plage directe et sur la plage conjuguée.

Cas général, influence du défaut de mise au point à l'enregistrement

Lors de l'enregistrement et pour le centre du champ on a :

$$\Delta_0(\alpha,\beta) = A(\alpha^2+\beta^2)^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

ε_0 : défaut de mise au point à l'enregistrement.

A la restitution de l'hologramme:

$$\Delta(\alpha,\beta) = A(\alpha^2+\beta^2)^2 + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

Avec $$\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_\lambda + \Delta\varepsilon \qquad \text{(III-16)}$$

$\varepsilon_\lambda = \overline{O_0 O_\lambda}$ défaut de mise au point crée par le chromatisme longitudinal

$\Delta\varepsilon = \overline{O_H O_{H'}}$ translation de l'hologramme (figure III-4)

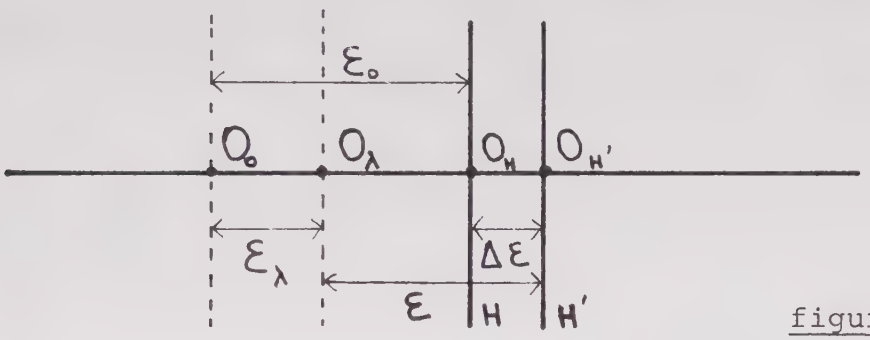


figure III-4

Equation des franges d'interférences sur la plage directe:

$$\frac{1}{d}\left[A(\alpha^2+\beta^2)^2 + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right] - \frac{1}{d_0}\left[A\left(\frac{d_0}{d}\right)^4(\alpha^2+\beta^2)^2 + \left(\frac{d_0}{d}\right)^2\frac{\varepsilon_0}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right] = C^{te}$$

$$\frac{A}{d}\left(1-\frac{d_0^3}{d^3}\right)(\alpha^2+\beta^2)^2 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2d}\right)\left(\varepsilon - \varepsilon_0\frac{d_0}{d}\right) = C^{te} \qquad \text{(III-17)}$$

En présence d'aberration sphérique, les anneaux de Newton sont déterminés à partir du défaut de mise au point:

$$\varepsilon - \varepsilon_0\frac{d_0}{d} = \varepsilon_0\left(1-\frac{d_0}{d}\right) + \varepsilon_\lambda + \Delta\varepsilon \qquad \text{(III-18)}$$

La translation de l'hologramme $\Delta\varepsilon$, effectuée en temps réel, pour éliminer les anneaux de défaut de mise au point (expression III-18) sur la plage directe est donnée par l'équation:

$$\varepsilon_0\left(1-\frac{d_0}{d}\right) - \varepsilon_\lambda + \Delta\varepsilon = 0$$

D'où la détermination du chromatisme longitudinal:

$$\varepsilon_\lambda = \Delta\varepsilon - \varepsilon_0\left(\frac{d_0}{d}-1\right) \qquad \text{(III-19)}$$

On déterminera ε_o par la méthode des deux demi-plages pour $\lambda = \lambda_o$

Il est également possible de déterminer le chromatisme longitudinal en utilisant simultanément les informations contenues sur les deux demi-plages.

Sur la plage conjuguée les anneaux observés sont caractéristiques du défaut de mise au point:

$$\varepsilon_o - \varepsilon_\lambda + \Delta\varepsilon + \varepsilon_o \frac{\lambda_o}{\lambda} \qquad \text{(III-20)}$$

L'égalité de courbure sur les deux plages, directe et conjuguée, sera donnée par l'équation:

$$\varepsilon_o - \varepsilon_\lambda + \Delta\varepsilon + \varepsilon \frac{\lambda_o}{\lambda} = \pm\left(\varepsilon_o - \varepsilon_\lambda + \Delta\varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_o}{\lambda}\right) \qquad \text{(III-21)}$$

Dans le cas où ε_o est non nul la solution de l'expression (III-21) est:

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_o + \Delta\varepsilon \qquad \text{(III-22)}$$

La position d'égalité de courbure permet donc d'accéder directement à la position du plan image pour la longueur d'onde indépendamment du défaut de mise au point

2) Chromatisme de grandissement et chromatisme apparent.

Pour étudier le chromatisme de grandissement ou apparent, les systèmes de franges seront observés au voisinage d'un point A du champ.

Tout d'abord la plaque H, située dans le plan d'enregistrement Π_o , est observée au centre du champ en O_o. Sans défaut de mise au point à l'enregistrement, les anneaux de défaut de mise au point que l'on observera lors de la reconstruction à la longueur d'onde λ seront caractéristiques de la distance $\overline{O_o O_\lambda}$. L'élimination de ces anneaux par un déplacement longitudinal place la plaque photographique H dans le plan Π_λ (figure III-5). A partir de ce réglage et en se plaçant au voisinage du point A'_o on observera sur toute la pupille des franges rectilignes dont le pas est caractéristique de la distance $\overline{A'_o A_\lambda}$ du chromatisme de grandissement Δx_g.

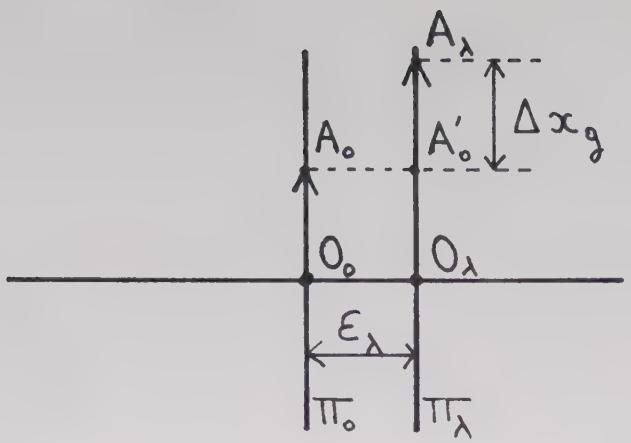


figure III-5

Dans le cas où l'hologramme a été enregistré avec un défaut de mise au point ε_o , l'égalité de courbure sur les deux plages sera obtenue en plaçant la plaque photographique dans le plan π_λ . Si le système présente du chromatisme de grandissement les anneaux se décentreront par rapport à la source, en se plaçant au voisinage d'un point du champ A. (figure III-6)

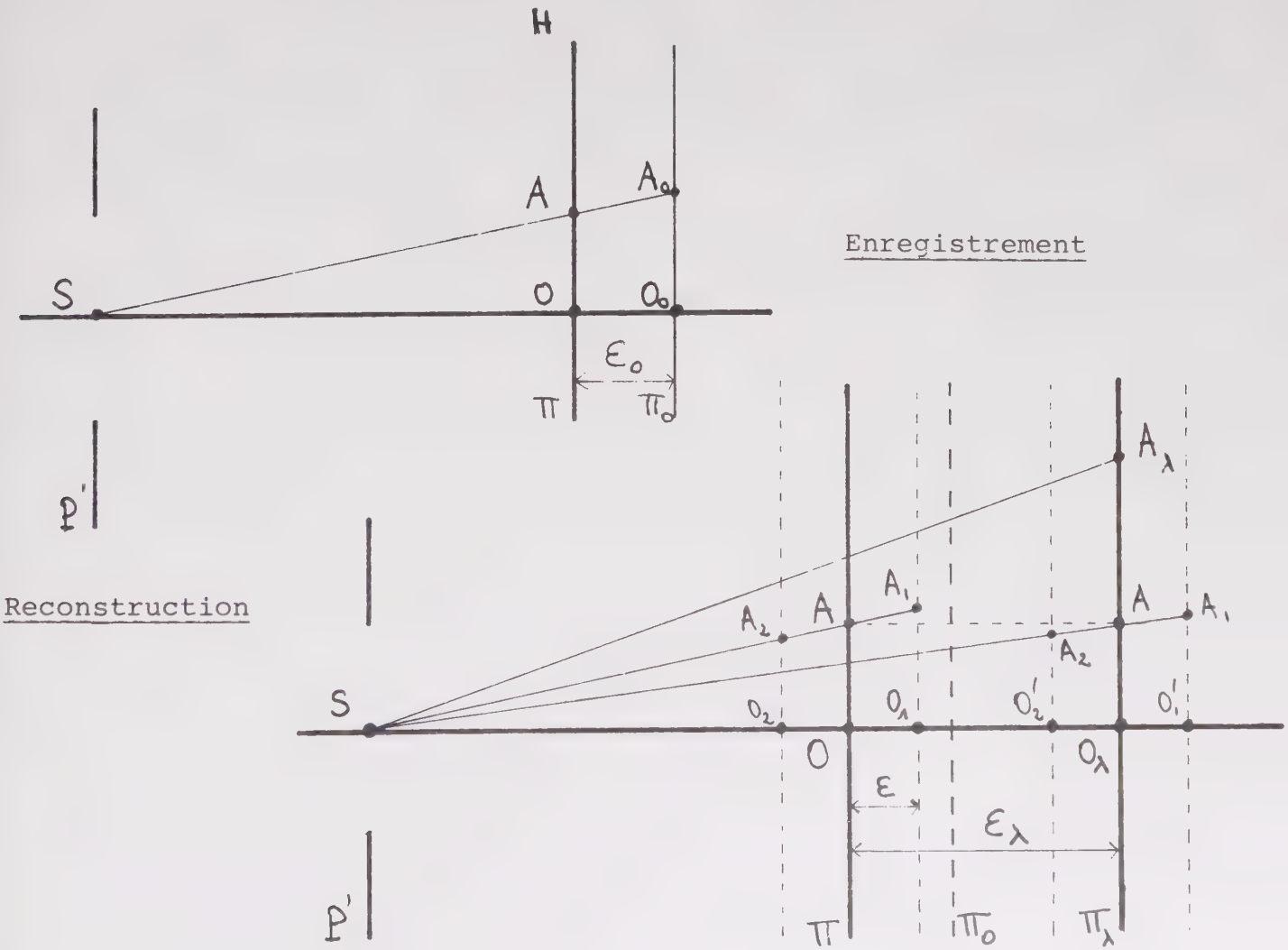


figure III-6

On préfère en général caractériser un système optique par son chromatisme apparent qui est défini à partir de la différence des angles sous lesquels on voit du centre de la pupille les images pour différentes longueurs d'onde.

L'hologramme étant placé dans sa position d'enregistrement on reconstruit les deux demi-pupilles, au centre du champ, après avoir changé de longueur d'onde: les anneaux de défaut de mise au point caractéristiques du chromatisme longitudinal seront centrés sur la source. En se plaçant au voisinage d'un point A le décentrage des anneaux observés caractérise alors le chromatisme apparent Δx_a. En effet si les points sont alignés sur une droite passant par le centre de la pupille, les anneaux seront centrés.

DISCUSSION.

Dans l'étude du chromatisme de grandissement ou apparent il est nécessaire de travailler au voisinage d'un point du champ, les aberrations de champ perturbent alors les franges de défaut de mise au point. Sur la plage directe la perturbation du système d'anneaux sera dûeà la différentielle radiale de la fonction aberration redonnant:

- le terme de coma multiplié par un facteur $\frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2}$
- le terme de courbure et d'astigmatisme multiplié par le facteur $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}$

la distorsion n'ayant pas d'influence.
Sur la plage conjuguée le système sera plus complexe car il fera intervenir le double des aberrations géométriques paires en plus de la variation différentielle des aberrations.

Pratiquement en présence d'une courbure de champ non négligeable la détermination de la surface de mise au point pour différentes longueurs d'onde peut être facilement effectuée.

3) Résultats expérimentaux.

L'expérience permettant de déterminer le chromatisme a été effectuée sur trois systèmes optiques différents, travaillant a des grandissements voisinsde l'unité.

Le système 1 est constitué de deux objectifs Clairault de longueurs focales 150 mm et 160 mm placés à une distance égale à la somme des focales, la pupille étant située dans le plan focal commun aux deux objectifs.

Le système 2 est constitué de deux objectifs Clairault de 150 mm placés à la distance f, la pupille étant placée au milieu de la distance des deux objectifs, système étudié pour fonctionner au grandissement 1 avec une ouverture f/5 et un champ de 30 mm.

Le système 3 est un objectif Nikkon de focale 55 mm ouvert à f/2,8. Cet objectif utilisé pour la macrophotographie travaille dans notre expérience au grandissement unité.

Nous avons pu mesurer pour chaque système la chromatisme longitudinal ε_λ en fonction de la longueur d'onde λ, la figure III-7 en donne les résultats.

On note que l'objectif Nikkon ne possède pas de chromatisme longitudinal entre 0,45 µm et 0,6 µm, le chromatisme longitudinal étant notable vers les fortes longueurs d'onde.

Le chromatisme longitudinal n'influence que très peu la qualité des images, la grandeur caractérisant l'altération des images étant le chromatisme apparent. Dans les systèmes que nous avons étudié le chromatisme apparent était bien corrigé, il n'était pas décelable.

La courbure de champ du système 2 a également été étudié, les surfaces de mise au point pour trois longueurs d'onde sont données par la figure III-8.

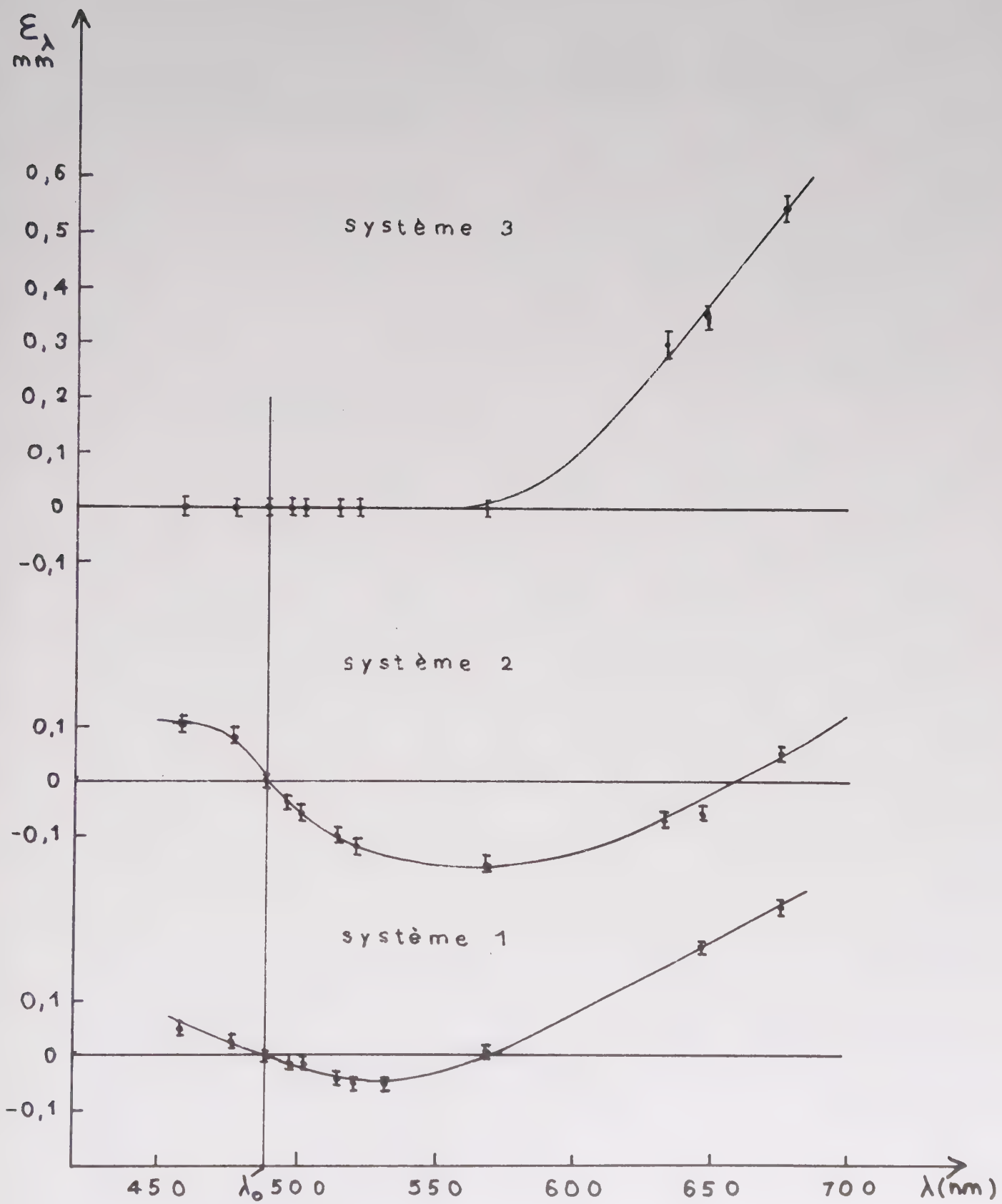

$\varepsilon_{m\lambda}$
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
système 3
système 2
0,1
0
-0,1
système 1
0,1
0
-0,1
450
λ_0
500
550
600
650
700
λ(nm)

fig. III-7

CHAPITRE IV

Visibilité et localisation des franges d'interférences. Discussion des hypothèses

Le problème de la visibilité des franges est essentiel dans les interféromètres en lumière diffuse. En effet, si le nombre minimal de franges décelables, lié aux dimensions de la plage d'observation, se définit comme dans un interféromètre classique, une autre limitation, liée à la baisse de contraste allant jusqu'à la disparition des franges, est caractéristique de l'interférométrie"speckle".

Si l'on considère les expériences de double photographie "speckle" classiques (c'est-à-dire sans onde de référence) (17) les phénomènes de baisse de visibilité ont été signalés et étudiés par de nombreux auteurs. Citons, par exemple, Archbold (7) qui signale ce type de limitation dans le cas de la double photographie d'un objet en rotation dans son plan; Mendez (18, 19, 20) étudie la visibilité et la localisation pour deux figures de "speckle" enregistrées dans des plans parallèles très proches; Hagopian (21, 22, 23) traite les problèmes dans différents cas, et met en évidence le rôle important des pupilles. L'effet des aberrations du système optique sur la visibilité dans des expériences particulières de double photographie dans l'image a été étudié notamment par Stetson (24) et Menu (25,26).

Ce phénomène existe également dans notre expérience d'interférométrie holographique. Nous l'avons signalé dans (II-4) en remarquant que la visibilité des franges est toujours plus faible sur la plage conjuguée que sur la plage directe; dans ce même chapitre nous avons traité le problème particulier d'un déplacement longitudinal de l'hologramme, en supposant le système optique dépourvu d'aberration.

Nous donnerons dans ce chapitre une étude systématique des problèmes de visibilité et de localisation. L'expression générale de la visibilité dans les images directe et conjuguée sera d'abord établie (calcul effectué à une dimension et système

optique 4f, pour simplifier la présentation des résultats). Le calcul sera ensuite développé à deux dimensions, et en faisant varier la position du plan d'observation, dans un cas particulier permettant des vérifications expérimentales. Nous terminerons par une discussion rapide sur les propriétés de l'objet diffusant utilisé, en particulier sur les effets de variations de phase faibles associées aux variations d'amplitude.

1) Expression de la visibilité dans les images directe et conjuguée.

1) Rappel: formule générale de visibilité

Lorsqu'on fait interférer des ondes diffusées, le système d'interférences est défini par la valeur moyenne de l'intensité résultante: on admet en effet que le phénomène de granularité a une fréquence beaucoup plus élevée que la fréquence propre de l'interférogramme. Soit A_1 et A_2 deux amplitudes complexes caractérisant des figures de granularité. L'intensité moyenne est définie par :

$$I = \langle A_1 A_1^* \rangle + \langle A_2 A_2^* \rangle + \langle A_1 A_2^* \rangle + \langle A_2 A_1^* \rangle$$

La partie qui caractérise les interférences, c'est-à-dire l'addition cohérente des ondes, est donnée par les deux derniers termes et est donc égale à :

$$\mathrm{Re} \langle A_1 A_2^* \rangle$$

La visibilité des franges s'exprime par le module de cette expression, rapporté au niveau moyen de I, donc

$$V = \frac{2 \left| \langle A_1 A_2^* \rangle \right|}{\langle A_1 A_1^* \rangle + \langle A_2 A_2^* \rangle} \qquad \text{(IV-1)}$$

alors que la phase de cette quantité complexe caractérise la forme des franges d'interférence. Toute étude de visibilité passe donc par la détermination de $\langle A_1 A_2^* \rangle$

2) Application à l'interféromètre à double plage.

L'amplitude "objet", définie dans le plan de la pupille à l'enregistrement est donnée par :

$$\tilde{A}(u)\,P(u)\,e^{j\phi(u,x')}$$

Les différentes opérations effectuées après remise en place de l'hologramme (déplacements ou déformations) se traduisent par un terme de phase additionnel, que nous désignerons par $\varphi(u)$ (terme linéaire dans le cas d'un déplacement latéral, ou quadratique pour déplacement longitudinal)

Reprenons les expressions de I_D et I_C à partir de (II-6) et (II-7)

$$I_D(v) = \int \tilde{A}(u)\,P(u)\,e^{j\phi(u,x')}\,e^{2j\pi u x'}\,p(x'-x'_0)\,e^{-2j\pi v x'}\,du\,dx' \qquad \text{(IV-2)}$$

pour l'image directe

$$I_c(v) = \int \tilde{A}^*(u)\,P(u)\,e^{-j\phi(u,x')}\,e^{-2j\pi u x'}\,p(x'-x'_0)\,e^{-2j\pi v x'}\,du\,dx'$$

pour l'image conjuguée, que l'on peut aussi écrire:

$$I_c(v) = \int \tilde{A}^*(-u)\,P(-u)\,e^{-j\phi(-u,x')}\,e^{+2j\pi u x'}\,p(x'-x'_0)\,e^{-2j\pi v x'}\,du\,dx'$$

et avec l'hypothèse d'une transparence réelle, $\tilde{A}^*(-u) = \tilde{A}(u)$

$$I_c(v) = \int \tilde{A}(u)\,P(u)\,e^{-j\phi(-u,x')}\,e^{2j\pi u x'}\,p(x'-x'_0)\,e^{-2j\pi v x'}\,du\,dx' \qquad \text{(IV-3)}$$

En ce qui concerne l'onde diffusée en temps réel par l'objet, elle est également observée à travers le diaphragme p, et par conséquent l'amplitude correspondante s'écrit:

$O_D(\nu) = I_D(\nu)$ s'il n'y a pas eu de modification

ou bien

$$O_D(\nu) = \int \tilde{A}(u) P(u) e^{j\phi(u,x')} e^{j\Psi(u)} e^{2j\pi u x'} \rho(x'-x'_0) e^{-2j\pi\nu x'} du\,dx' \qquad \text{(IV-4)}$$

en présence d'une modification de montage, correspondant à un déphasage $\Psi(u)$.

Au cours de l'étude théorique faite en II-1 nous avons fait l'hypothèse que la variation par rapport à x' de ϕ était négligeable sur l'étendue du diaphragme p: $\phi(u,x') = \phi(u,x'_0)$ et que, d'autre part, la tache de diffraction relative à ce diaphragme p pouvait être assimilée à une fonction δ. On conçoit que ces deux conditions soient difficiles à réaliser simultanément lorsque la fonction aberration varie rapidement dans le champ.

Les conditions réelles de la reconstruction des images seront plus faciles à mettre en évidence si l'on exprime les différentes amplitudes sous une autre forme. Par exemple l'amplitude I_D peut s'écrire:

$$\int \tilde{A}(u) P(u) e^{j\phi(u,x'_0)} du \int \rho(x'-x'_0) e^{j[\phi(u,x')-\phi(u,x'_0)]} e^{2j\pi(u-\nu)x'} dx' \qquad \text{(IV-5)}$$

Nous désignerons par $\Delta\phi(u, x'-x'_0)$ la quantité: $\phi(u,x') - \phi(u,x'_0)$

L'intégrale $\int \rho(x'-x'_0)\, e^{j\Delta\phi(u,x'-x'_0)} e^{2j\pi(u-\nu)x'} dx'$

peut s'écrire, après le changement de variable $x'' = x'-x'_0$,

$$\tilde{\rho}_1(u-\nu) = e^{2j\pi(u-\nu)x'_0} \int \rho(x'') e^{j\Delta\phi(u,x'')} e^{2j\pi(u-\nu)x''} dx''$$

$\tilde{\rho}_1(u)$ représente la tache de diffraction "aberrante" d'un système optique centré sur l'hologramme au point x'_0, et caractérisé par : - une ouverture p

- une fonction "aberration" $\Delta\phi(u,x'')$

L'amplitude réellement reconstruite est donc la convolution de l'amplitude enregistrée par la tache de diffraction aberrante $\tilde{p}_1(u)$.

Nous avons assimilé dans l'étude du chapitre II cette fonction à une fonction δ . Sans faire cette simplification, on peut cependant admettre que le domaine d'intégration de l'expression (IV-5) correspond à une région de petite dimension autour de $u = v$. En faisant l'hypothèse - raisonnable - que les variations de la fonction ϕ sur cette zone sont lentes, on pourra supposer $u-v = t$ petit et développer $\phi(u,x")$ par rapport à t. De même, on pourra admettre que les variations de en fonctionde x" sont lentes sur la pupille p, et que x" peut être également considéré comme petit.

Le même raisonnement s'applique pour I_C et O_D

On a :

$$I_c(v) = \int \tilde{A}(u) P(u) e^{-j\phi(-u,x'_o)} e^{2j\pi(u-v)x'_o} \int \rho(x") e^{-j\Delta\phi(-u,x")} e^{2j\pi(u-v)x"} dx" du$$

et on trouve une convolution de l'expression de l'amplitude établie en II par une tache de diffraction aberrante $\tilde{p}_2(u)$, qui diffère de $\tilde{p}_1(u)$ puisque la fonction "aberration" est maintenant

$$-\Delta\phi(-u,x")$$

Nous aurons donc à calculer d'après (IV-1)

$$V_D = \frac{2|\langle I_D O_D^* \rangle|}{\langle I_D I_D^* \rangle + \langle O_D O_D^* \rangle} \qquad V_C = \frac{2|\langle I_C O_D^* \rangle|}{\langle I_C I_C^* \rangle + \langle O_D O_D^* \rangle}$$

(image directe) (image conjuguée)

Nous reprendrons pour le calcul de V_D et V_C les expressions (IV-2), (IV-3) et (IV-4) de I_D , I_C et O_D.

Calcul de $\langle I_D I_D^* \rangle$

$$\langle I_D I_D^* \rangle = \int \langle \tilde{A}(u_1) \tilde{A}^*(u_2) \rangle P(u_1) P(u_2) e^{j\phi(u_1,x'_1)} e^{-j\phi(u_2,x'_2)} p(x'_1)\, p(x'_2) e^{2j\pi(u_1-v)x'_1} e^{-2j\pi(u_2-v)x'_2} du_1\, du_2\, dx'_1\, dx'_2$$

$\tilde{A}(u)$ représente la fonction "speckle" produite dans la pupille par l'objet, que l'on peut supposer très grand, et on pourra écrire:

$$\langle \tilde{A}(u_1) \tilde{A}^*(u_2) \rangle = \delta(u_1 - u_2)$$

D'où

$$\langle I_D I_D^* \rangle = \int |P(u)|^2 e^{j[\phi(u,x'_1) - \phi(u,x'_2)]} p(x'_1)\, p(x'_2) e^{2j\pi(u-v)(x'_1-x'_2)} du\, dx'_1\, dx'_2$$

Nous avons montré que l'on peut considérer u-v = t comme petit donc

$$\langle I_D I_D^* \rangle = |P(v)|^2 \int e^{j[\phi(v,x'_1) - \phi(v,x'_2)]} e^{jt[\phi'_u(v,x'_1) - \phi'_u(v,x'_2)]} p(x'_1)\, p(x'_2) e^{2j\pi t(x'_1-x'_2)} dt\, dx'_1\, dx'_2$$

L'intégrale par rapport à t s'exprime par :

$$\delta\left\{x'_1 - x'_2 + \frac{1}{2\pi}\left[\phi'_u(v,x'_1) - \phi'_u(v,x'_2)\right]\right\}$$

$(x'_1 - x'_2)$ est également en facteur dans $\phi'_u(v,x'_1) - \phi'_u(v,x'_2)$ et on obtient donc $\delta(x'_1 - x'_2)$ pour cette intégration.

On réalise donc en définitive l'intégration par rapport à x'_2 en posant $x'_1 = x'_2$ et il reste :

$$\langle I_D I_D^* \rangle = \int \left[p(x'_1)\right]^2 dx'_1$$

On obtient donc en fait la surface de la pupille p(x) sur l'hologramme. A une dimension, on obtient la largeur 2a de la pupille. On montrerait de même que ce résultat est obtenu également pour $\langle I_C I_C^* \rangle$ et $\langle O_D O_D^* \rangle$ et on peut donc écrire:

$$V_D = \frac{1}{2a} |\langle I_D O_D^* \rangle| \qquad V_C = \frac{1}{2a} |\langle I_C O_D^* \rangle|$$

Calcul de $\langle I_D O_D^* \rangle$

Le calcul est développé avec les mêmes hypothèses simplificatrices et on obtient après développement par rapport à $t = u - v$

$$\int p(x''_1)\, p(x''_2)\, e^{j\left[\phi(v, x''_1 + x'_0) - \phi(v, x''_2 + x'_0)\right]} e^{j\Psi(v)} e^{jt\Psi'_u(v)}$$
$$e^{jt\left[\phi'_u(v, x''_1 + x'_0) - \phi'_u(v, x''_2 + x'_0)\right]} e^{2j\pi t (x''_1 - x''_2)} \, dt\, dx''_1\, dx''_2$$

L'intégration par rapport à t est de la forme :

$$\delta\left\{(x''_1 - x''_2)\left[1 + \text{fonction de } v, x''_1, x''_2\right] + \frac{1}{2\pi}\Psi'_u(v)\right\}$$
$$\simeq \delta\left[x''_1 - x''_2 + \frac{1}{2\pi}\Psi'_u(v)\right]$$

Par analogie avec le terme de franges rectilignes dû à un déplacement latéral d ($\Psi(u) = 2\pi u d$) nous pouvons définir $\frac{u}{2\pi}\Psi'_u(v)$ comme un déplacement équivalent d, relatif aux franges obtenues au voisinage de v et l'expression de la visibilité est donc :

$$V_D = \frac{1}{2a}\left| \int p(x''_1)\, p(x''_1 + d)\, e^{j\left[\phi(v, x''_1 + x'_0) - \phi(v, x''_1 + d + x'_0)\right]} dx''_1 \right| \qquad \text{(IV-6)}$$

avec $\quad d = \frac{1}{2\pi}\Psi'_u(v)$

Calcul de $\langle I_C O_D^* \rangle$

Toujours avec les mêmes approximations on obtient:

$$\langle I_C O_D^* \rangle = \frac{1}{2a}\left| \int p(x''_1)\, p(x''_2)\, e^{j\left[\phi(v, x''_1 + x'_0) + \phi(-v, x''_2 + x'_0)\right]} e^{j\Psi(v)} \right.$$
$$\left. e^{2j\pi t (x''_1 - x''_2)} e^{jt\Psi'_u(v)} e^{jt\left[\phi'_u(v, x''_1 + x'_0) - \phi'_u(-v, x''_2 + x'_0)\right]} dt\, dx''_1\, dx''_2 \right|$$

On intègre par rapport à t

$$\delta\left\{x''_1 - x''_2 + \frac{1}{2\pi}\left[\Psi'_u(v) + \phi'_u(v, x''_1 + x'_o) - \phi'_u(-v, x''_2 + x'_o)\right]\right\}$$

On note que dans $\phi'_u(v, x''_1 + x'_o) - \phi'_u(-v, x''_2 + x'_o)$ $(x''_1 - x''_2)$ n'est pas en général en facteur, et en supposant x''_1 et x''_2 petits devant x'_o on retiendra seulement le terme constant par rapport à x''_1 et x''_2 : $\phi'_u(v, x'_o) - \phi'_u(-v, x'_o)$

et le déplacement équivalent au voisinage de v s'exprime donc par :

$$d = \frac{1}{2\pi}\left[\Psi'_u(v) + \phi'_u(v, x'_o) - \phi'_u(-v, x'_o)\right]$$

d'où

$$V_c = \frac{1}{2a}\left|\int p(x''_1)\, p(x''_1 + d)\, e^{j\left[\phi(v, x''_1 + x'_o) - \phi(-v, x''_1 + x'_o + d)\right]} dx''_1\right| \qquad \text{(IV-7)}$$

3) Interprétation des résultats

L'examen des expressions IV-6 et IV-7 nous permet de tirer un certain nombre de conclusions.

En l'absence d'aberrations dépendant de la variable de champ les expressions de la visibilité sont identiques pour les plages directe et conjuguée, et se ramènent à une intégrale qui est l'aire commune à deux pupilles décalées de d, déplacement équivalent. A une dimension on obtient une expression de la forme :

$$V = \frac{2a - d}{2a} \qquad \text{(IV-8)}$$

La visibilité ne dépend alors pour une pupille donnée que du déplacement équivalent d, c'est-à-dire de la fréquence des franges au voisinage du point d'observation. D'autre part, on peut prendre 2a assez grand, puisqu'aucune variation en fonction de x' n'intervient sur la fonction de phase: en l'absence d'aberrations de champ, on pourra obtenir constamment une visibilité voisine de 1.

Dans le cas général, existence d'aberrations de champ non négligeables, on note qu'un certain nombre de termes de phase indépendant de x'', peuvent être mis en facteur dans les intégrales des expressions IV-6 et IV-7, et caractérisent la forme des franges. On poursuivra le calcul des visibilités en développant les termes de phase par rapport à la variable x''_1, au premier ordre près.

Pour la plage directe, on obtient:

$$\phi(\nu, x''_1+x'_0) - \phi(\nu, x''_1+d+x'_0) = x''_1\left[\phi'_x(\nu,x'_0) - \phi'_x(\nu,x'_0+d)\right]$$
$$= -x''_1\, d\, \phi''_x(\nu,x'_0)$$

en remarquant que d, déplacement équivalent, est du même ordre que x''_1, on pourra admettre que ce terme est négligeable et écrire la visibilité sous la forme:

$$V_D = \frac{1}{2a}\int P_d(x'')\,dx'' = \frac{2a-d}{2a}$$

où $P_d(x)$ désigne la pupille constituée par la partie commune à deux pupilles décalées de d, fente de largeur $2a-d$ en raisonnant à une dimension. La visibilité conserve donc sur la plage directe la même expression qu'en l'absence d'aberration (toutefois, il faut limiter la valeur de $2a$ pour pouvoir considérer x' comme petit).

Pour la plage conjuguée, par contre, on obtient:

$$\phi(\nu, x''_1+x'_0) + \phi(-\nu, x''_1+d+x'_0) = x''_1\left[\phi'_x(\nu,x'_0) + \phi'_x(-\nu,x'_0+d)\right]$$
$$\simeq x''_1\left[\phi'_x(\nu,x'_0) + \phi'_x(-\nu,x'_0)\right]$$

et le coefficient de x''_1 ne s'annule pas, même lorsque le déplacement équivalent d tend vers 0. La visibilité s'obtient alors sous la forme

$$V_C = \frac{1}{2a}\left|\int P_d(x'')\, e^{j x''\left[\phi'_x(\nu,x'_0)+\phi'_x(-\nu,x'_0)\right]}\, dx''\right|$$

La visibilité, sur la plage conjuguée, est donc toujours affectée par l'existence des aberrations, même pour des franges très étalées. Les résultats obtenus permettent donc d'expliquer les variations de visibilité entre les deux plages obtenues expérimentalement.

Nous allons maintenant préciser ce résultat , en fonction des coefficients d'aberrations, en discutant de plus le problème des localisations, dans le cas particulier d'un enregistrement en une pose à pleine pupille; les résultats concernant la visibilité et la localisation restent applicables au cas de la plage conjuguée dans notre interféromètre.

2) Etude de la visiblité des franges pour un enregistrement à pupille entière, localisation de la région de meilleure visibilité.

Nous raisonnerons toujours sur le système télécentrique présenté sur la figure II-1, on rappelle les coordonnées: (x,y) plan objet, (u,v) plan pupille, (x',y') plan image
Nous rappelons la transparence en amplitude de l'hologramme qui a été enregistré dans le plan image (expression II-5):

$$1 + \mathcal{C}(x',y') + \mathcal{C}^*(x',y')$$

avec $$\mathcal{C}(x',y') = \int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{j\Phi(u,v,x',y')} e^{2j\pi(ux'+vy')} du\,dv$$

L'hologramme H éclairé par une onde cohérente reconstruit à la distance D deux images d'amplitudes I_C et I_D. Ces deux images interfèrent entre elles, le système de franges observé caractérise le double de l'aberration paire. La fonction aberration variant dans le champ il est nécessaire de se limiter à une faible région de la plaque en utilisant un diaphragme p
Le choix des axes de coordonnée est arbitraire, le système à l'enregistrement possédant la symétrie de révolution, pour simplifier les calculs nous choisirons l'axe Ox' dans la direction du filtrage: la diaphragmation est alors faite au point ($x' = x'_o$, $y' = o$) (figure IV-1)

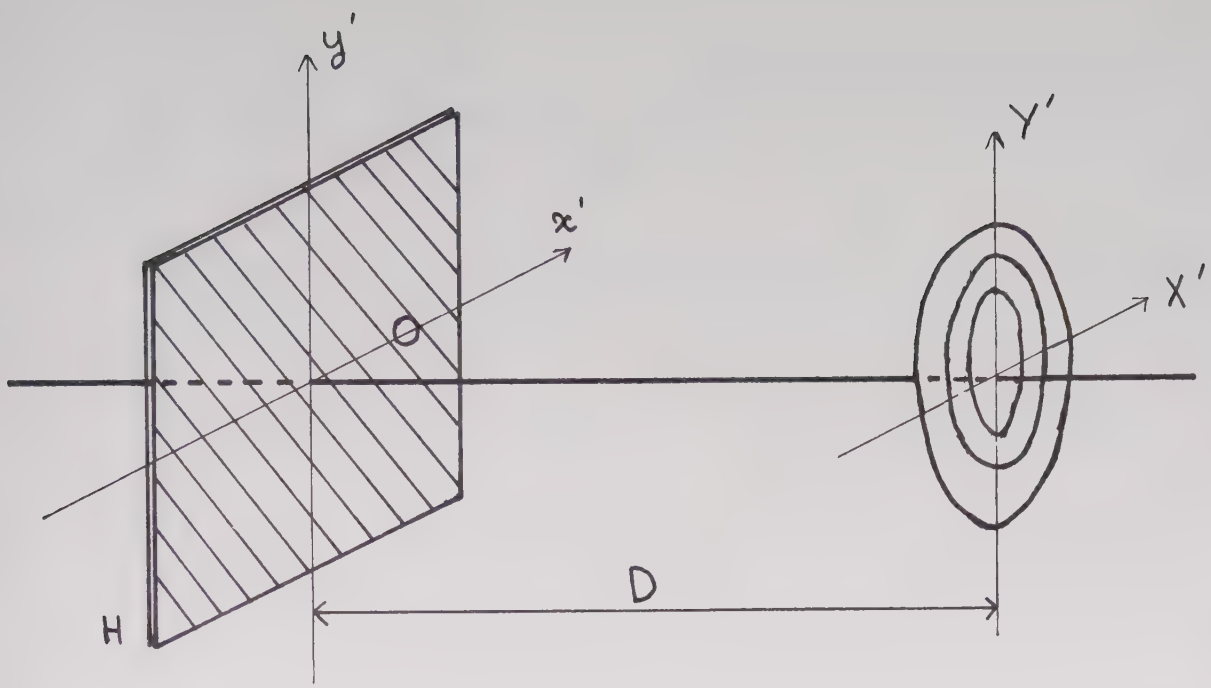


figure IV-1

Dans le plan P' à la distance D les images reconstruites sont:

Image directe :

$$I_D(X',Y') = \int \mathcal{O}(x',y')\, p(x'-x'_0,y')\, e^{j\pi \frac{(X'-x')^2+(Y'-y')^2}{\lambda D}} dx'\,dy' \qquad \text{(IV-9)}$$

Image conjuguée:

$$I_c(X',Y') = \int \mathcal{O}^*(x',y')\, p(x'-x'_0,y')\, e^{j\pi \frac{(X'-x')^2+(Y'-y')^2}{\lambda D}} dx'\,dy' \qquad \text{(IV-10)}$$

En posant $u' = \frac{X'}{\lambda D}$ et $v' = \frac{Y'}{\lambda D}$ l'expression (IV-9) devient:

$$I_D(u',v') = e^{j\pi\lambda D(u'^2+v'^2)} \int A(x,y)\, P(u,v)\, \tilde{P}_1(u-u',v-v')\, e^{2j\pi(ux+vy)}\, du\,dv\,dx\,dy$$

avec $\tilde{P}_1(u,v) = \int p(x'-x'_0, y') e^{j\Phi_1(u,v,x',y')} e^{2j\pi[ux'+vy']} dx'dy'$

$\tilde{P}_1(u,v)$ est la transformée de Fourier de la pupille p affectée du terme de phase aberrant $\Phi_1(u,v,x',y')$ tel que:

$$\Phi_1(u,v,x',y') = \phi(u,v,x',y') + \frac{\pi(x'^2+y'^2)}{\lambda D}$$

la fonction $\phi(u,v,x',y')$ est l'expression classique des aberrations avec origine au centre de la pupille (II-12)

De même l'expression (IV-10) peut s'écrire:

$$I_c(u',v') = e^{2j\pi\lambda D(u'^2+v'^2)} \int A(x,y) P(u,v) \tilde{P}_2(-u-u',-v-v') e^{-2j\pi(ux+vy)} du\,dv\,dx\,dy$$

$\tilde{P}_2(u,v)$ est la transformée de Fourier de la pupille p affectée du terme de phase aberrant $\Phi_2(u,v,x',y')$ tel que :

$$\Phi_2(u,v,x',y') = -\phi(u,v,x',y') + \frac{\pi(x'^2+y'^2)}{\lambda D}$$

La visibilité des franges obtenues par interférence entre I_c et I_D est donnée par l'expession (IV-1)

$$V = \frac{2|\langle I_D I_c^* \rangle|}{\langle |I_D|^2 \rangle + \langle |I_c|^2 \rangle}$$

avec $\langle |I_D|^2 \rangle = \langle |I_c|^2 \rangle$ = surface de la pupille

Dans la valeur moyenne de $I_D I_C^*$, la seule partie aléatoire est la transformée de Fourier du diffuseur d'amplitude. Nous pouvons supposer que la longueur de corrélation de l'onde "speckle" est très étroite devant les transformées de Fourier des pupilles $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ (objet grand devant la pupille de filtrage P)

On peut alors écrire:

$$\langle I_D I_c^* \rangle = \int P(u,v) P(-u,-v) \tilde{P}_1(u-u',v-v') \tilde{P}_2^*(-u-u',-v-v') du\,dv$$

La fonction pupille $P(u,v)$ étant centrée en $(u=0, v=0)$

$$P(u,v) \cdot P(-u,-v) = P(u,v)$$

Cette fonction $P(u,v)$ est très large devant $\tilde{P}_1 \tilde{P}_2^*$ elle n'opèrera pas de diaphragmation dans le plan (u, v) on peut alors écrire sur l'image de la pupille:

$$\langle I_D I_C^* \rangle = \int \tilde{P}_1(u-u', v-v') \tilde{P}_2^*(-u-u', -v-v')\, du\, dv \qquad \text{(IV-11)}$$

A partir des expressions de $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ nous obtenons donc:

$$\langle I_D I_C^* \rangle = \int P(x'_1 - x'_0, y'_1) e^{j\Phi_1(u,v,x'_1,y'_1)} e^{2j\pi[x'_1(u-u')+y'_1(v-v')]} \cdot P(x'_2 - x'_0, y'_2) e^{-j\Phi_2(-u,-v,x'_2,y'_2)} e^{-2j\pi[x'_2(u+u')+y'_2(v+v')]} dx'_1 dx'_2 dy'_1 dy'_2$$

(IV-12)

avec $\Phi_1(u,v,x'_1,y'_1) = \phi(u,v,x'_1,y'_1) + \frac{\pi(x'^2_1+y'^2_1)}{\lambda D}$

$$-\Phi_2(-u,-v,x'_2,y'_2) = \phi(-u,-v,x'_2,y'_2) - \frac{\pi(x'^2_2+y'^2_2)}{\lambda D}$$

et

$$\phi(u,v,x',y') = a(u^2+v^2)^2 + b(ux'+vy')(u^2+v^2) + c(x'^2+y'^2)(u^2+v^2)$$
$$+ d\left[(x'^2-y'^2)(u^2-v^2) + 4x'y'uv\right] + e(x'^2+y'^2)(ux'+vy') + \pi\lambda\varepsilon(u^2+v^2)$$

Les intégrations sont faites sur les pupilles centrées en faisant les changements de variables:

$$\begin{cases} x'_1 - x'_0 = x''_1 \\ x'_2 - x'_0 = x''_2 \end{cases}$$

L'expression (IV-12) peut alors s'écrire:

$$\langle I_D I_C^* \rangle = \int p(x''_1, y_1)\, p(x''_2, y_2)\, e^{2j\Phi_p(u,v,x'_0,0)}$$
$$e^{j\Delta\Phi_1(u,v,x''_1,y_1,x''_2,y_2)}$$
$$e^{2j\pi\left[(x''_1-x''_2)\left(u-u'+\frac{x'_0}{\lambda D}\right)+(y_1-y_2)(v-v')\right]}$$
$$dx''_1\, dx''_2\, dy_1\, dy_2\, du\, dv$$

(IV-13)

$\Phi_p(u,v,x'_0,0)$ étant le double des aberrations paires en (u, v) au point $(x'_0, 0)$ de l'hologramme

$\Delta\Phi_1$ est le résidu d'aberration de Φ_1 et Φ_2 du au développement au voisinage de x'_0

Le domaine d'intégration sur u et v correspond à une petite région au voisinage de $u = u' - \frac{x'_0}{\lambda D}$ et $v = v'$, en faisant les changements de variables:

$$\begin{cases} u_1 = u - u' + \frac{x'_0}{\lambda D} \\ v_1 = v - v' \end{cases}$$

on pourra alors développer au premier ordre en u_1 et v_1
On notera $u'' = u' - \frac{x'_0}{\lambda D}$ et pour symétriser l'expression $v' = v''$
L'expression (IV-13) s'écrit alors:

$$e^{2j\Phi_p(u'',v'',x'_0,0)} \int p(x''_1, y_1)\, p(x''_2, y_2)\, e^{2j\pi\Delta\Phi_2(x''_1,x''_2,y_1,y_2)}$$
$$e^{2j\pi u_1\left[x''_1(1+\alpha)-x''_2(1+\beta)+x'_0\right]}$$
$$e^{2j\pi v_1\left[y_1(1+\gamma)-y_2(1+\delta)+y''_0\right]}$$
$$dx''_1\, dx''_2\, dy_1\, dy_2$$

(IV-14)

avec :

$$\Phi_p(u,v,x'_0,0) = a(u^2+v^2)^2 + cx'_0(u^2+v^2) + dx'_0(u^2-v^2) + \pi\lambda\varepsilon(u^2+v^2)$$

C'est un terme de phase caractérisant les interférences entre image directe et image conjuguée pour le point (x'_0 , 0) de l'hologramme $\Delta\phi_2$ étant une fonction aberration indépendante de u_1, v_1 et

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, x''_0 et y''_0 sont aussi fonction des aberrations, on considèrera α , β , γ et δ négligeables devant 1, l'intégration sur (u_1 , v_1) donne alors une fonction de Dirac:

$$\delta(x''_1 - x''_2 + x''_0 , y_1 - y_2 + y''_0)$$

avec

$$x''_0 = 4a'(u''^2 + v''^2)u'' + 2(d\varepsilon + (c'+d')x'^2_0)u''$$

$$y''_0 = 4a'(u''^2 + v''^2)v'' + 2(d\varepsilon + (c'\,d')x'^2_0)v''$$

$$a' = \frac{a}{\pi} \quad , \quad c' = \frac{c}{\pi} \quad , \quad d' = \frac{d}{\pi} \qquad \text{(IV-15)}$$

L'expression de la visibilité se ramène donc à l'intégrale:

$$\int P(x''_1, y_1)\, P(x''_1 + x'_0, y_1 + y''_0)\, e^{2j\pi \Delta\phi_3(x''_1, y''_1)}\, dx''_1\, dy_1$$

(IV-16)

$\Delta\phi_3(x''_1, y_1)$ étant obtenu à partir du développement de au premier ordre en x''_1 et y_1

$$\Delta\phi_3(x''_1, y_1) = c(u''^2 + v''^2)\left[x''_1(4x'_0 + 2x''_0) + 2y_1 y''_0\right]$$

$$+ d\left[(u''^2 - v''^2)\left(x''_1(4x'_0 + x''_0) + 2y_1 y''_0\right) + 4u''v''\left(x''_1 y''_0 + y_1(2x'_0 + x''_0)\right)\right]$$

$$+ e\left[u''(-6x''_0 x''_1 - 2y_1 y''_0)x'_0 - v''(2y''_0 x''_1 + 2x''_0 y_1)x'_0\right]$$

$$- \frac{2\pi}{\lambda D}\left[x''_1 x''_0 + y''_0 y_1\right] \qquad \text{(IV-17)}$$

En négligeant le décalage des pupilles on admettra que pour pouvoir observer les franges d'interférences avec une visibilité maximum il est nécessaire que les coefficients de x''_1 et de y_1 dans l'intégrale soient nuls (ce qui correspond au maximum de la transformée de Fourier caractérisant la visibilité).

On obtient donc deux équations:

$$c(u''^2+v''^2)(4x'_0+2x''_0)+d\left[(u''^2-v''^2)(4x'_0+2x''_0)+4u''v''y''_0\right]$$
$$+e\left[-6x'_0x''_0u''-2v''(x'_0y''_0+y''_0x''_0)\right]-\frac{2\pi x''_0}{\lambda D}=0$$

$$2c(u''^2+v''^2)y''_0+d\left[2(u''^2-v''^2)y''_0+4u''v''(x''_0+2x'_0)\right]$$
$$+e\left[-2y''_0(x'_0+x''_0)u''-2x'_0x''_0v''\right]-\frac{2\pi y''_0}{\lambda D}=0$$

Dans le cas où le filtrage n'est pas effectué sur l'axe du système on peut écrire:

$$4x'_0+2x''_0=4x'_0 \qquad 2x'_0+x''_0=2x'_0$$

Les deux équations se ramènent donc a:

$$4C(u''^2+v''^2)x'_0+4e\left[(u''^2+v''^2)x'_0+u''v''y''_0\right]$$
$$-2ex'_0\left[3x''_0u''+v''y''_0\right]-\frac{2\pi x''_0}{\lambda D}=0 \qquad \text{(IV-18)}$$

$$2C(u''^2+v''^2)y''_0+2e\left[(u''^2-v''^2)y''_0+4u''v''x'_0\right] \qquad \text{(IV-19)}$$
$$-2ex'_0\left[y''_0u''+x''_0v''\right]-\frac{2\pi y''_0}{\lambda D}=0$$

Dans le cas d'un système possédant peu d'aberration sphérique:

$$x''_0=2\left(\lambda\varepsilon+(c'+d')x'^2_0\right)u''$$
$$y''_0=2\left(\lambda\varepsilon+(c'-d')x'^2_0\right)v''$$

On notera par la suite : $\begin{cases} x''_0 = \alpha u'' \\ y''_0 = \beta v'' \end{cases}$

Les deux équations (IV-18) et (IV-19) peuvent alors s'écrire en négligeant les termes d'un degré supérieur:

$$4x'_0(c+d)u''^2 + 4x'_0(c-d)v''^2 - \frac{2\pi\alpha}{\lambda D}u'' = 0$$

$$\left[\delta\alpha x'_0 u'' - \frac{2\pi\beta}{\lambda D}\right]v'' = 0 \qquad \text{(IV-20)}$$

où u" et v" sont définies par : $u'' = u' - \frac{x'_0}{\lambda D} = \frac{X' - x'_0}{\lambda D}$

$$v'' = \frac{Y'}{\lambda D}$$

L'hologramme étant placé au foyer de l'objectif L on réalise ainsi l'image du plan d'observation (figure IV-2). La transformation effectuée par l'objectif L nous donne la relation :

$$D\,D' = -f^2$$

la distance D' étant donnée par rapport au foyer image de l'objectif. Le plan (X,Y) image du plan (X', Y') satisfait la relation :

$$\begin{cases} X = \gamma X' \\ Y = \gamma Y' \end{cases} \qquad \text{avec } \gamma = \frac{f}{D} = -\frac{D'}{f}$$

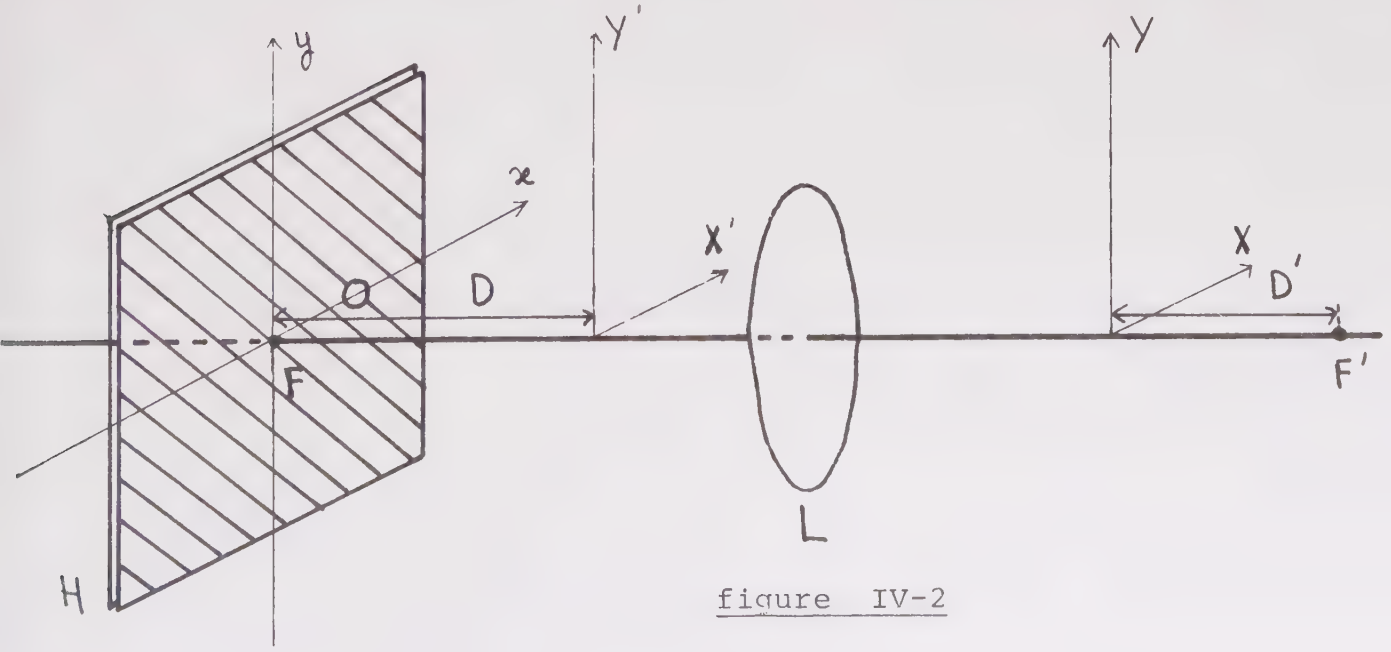


figure IV-2

La substitution de ces expressions dans les équations (IV-20) permet d'obtenir la caractérisation des points de l'espace (X,Y,D') où les franges seront observables avec une visibilité maximum:

$$4x'_o(c+d)X^2 + \left[8x'^2_o(c+d) + 2\pi\alpha\right]\frac{D'}{f}X + \frac{\beta x'_o D'}{\alpha f^2}Y^2 + \left[2\pi t' + 4(c+d)x'^2_o\right]\frac{x'_o D'^2}{f^2} = 0 \quad \text{(IV-21)}$$

$$\left[8\alpha x'_o \Delta f\, X + \left(2\pi\beta + 8\alpha x'^2_o\right)\Delta D'\right]Y = 0 \quad \text{(IV-22)}$$

La solution triviale $Y_o = 0$ de l'équation (IV-22) permet d'obtenir les solutions de l'équation (IV-21) pour $(c+d)\,x'_o$ non nul:

$$X_1 = -\frac{x'_o D'}{f}$$

$$X_2 = -\left(x'_o + \frac{\pi\alpha}{2(c+d)x'_o}\right)\frac{D'}{f}$$

La solution de l'équation (IV-22) est unique en l'absence d'astigmatisme (d=o) ou au centre du champ (x'_o=o)
Dans le cas général ($\alpha x'_o \neq 0$) l'autre solution est:

$$X_3 = -\frac{D'}{f}\left(x'_o + \frac{\pi\beta}{4\alpha x'_o}\right)$$

La substitution de X_3 dans l'équation (IV-21) permet d'obtenir, si elles existent, les solutions $\pm Y_1$; la valeur Y_1, non nulle, ne prenant pas généralement une forme simple.
Les quatre solutions sont donc:

$$M_1(X_1, Y_o) \quad M_2(X_2, Y_o) \quad M_3(X_3, Y_1) \quad M_4(X_3, -Y_1)$$

DISCUSSION.

Au centre du champ (x'_o= O) les équations (IV-21) et (IV-22) sont toujours vérifiées pour tous points (X,Y) pour D' = O. La visibilité est maximum au centre du champ sur toute l'image de la pupille dans le plan image de l'onde de référence

(figure IV-3).

Dans ce même plan pour un point quelconque de filtrage ($x' \neq o$) la visibilité maximum est alors limitée seulement à l'axe OY. (figure IV-4)

Le point $M_1 \left(X = -\frac{x'_o D'}{f} \; , \; Y = o \right)$ est la projection dans le plan à la distance D' du foyer image, de l'onde de référence centrée sur la pupille pour un point x'_o du champ.

Le point, $M_2 (X_2, Y_o)$ solution des deux équations est situé sur l'axe OX tel que :

$$X_2 = -\frac{D'}{f}\left[x'_o + \frac{\pi \alpha}{2(c+d)x'_o} \right]$$

avec $$\alpha = 2\left(\lambda \mathcal{E} + \frac{(c+d)}{\pi} x'^2_o \right)$$

La solution est donc:

$$X_2 = -\frac{D'}{f}\left[2x'_o + \frac{\pi \lambda \mathcal{E}}{(c+d)x'_o} \right] \qquad \text{(IV-23)}$$

Lorsque D' varie, le centre de la zone de visibilité décrit la droite passant par le foyer image et faisant l'angle θ avec l'axe du système tel que:

$$\theta = -\frac{1}{f}\left[2x'_o + \frac{\pi \lambda \mathcal{E}}{(c+d)x'_o} \right]$$

Résultats expérimentaux.

L'hologramme enregistré à pleine pupille, restituera dans le plan image de la pupille l'interférogramme caractéristique du double des aberrations paires. L'observation de ces franges d'interférences à l'aide du montage présenté sur la figure (IV-2) nous a permis de vérifier que la localisation dans l'espace image est définie à partir des équations (IV-21) et (IV-22). Nous avons pu montrer que, dans la direction parallèle à la direction du filtrage sur H et à la distance D' du foyer image de l'objectif, la région de visibilité maximum est centrée au point défini par l'expression (IV-23) (figure IV-5)

Nous avons donc déterminé expérimentalement cette région. Les mesures ont été effectuées en déterminant la distance de la zone de visibilité à l'image de l'onde référence, l'expression (IV-23) ramenée à cette nouvelle origine devient alors:

$$X = -\frac{D'}{f}\left[x'_o + \frac{\pi d \varepsilon}{(c+d)x'_o}\right]$$

Nous avons déterminé expérimentalement l'angle Ψ entre cette droite et l'axe du système avec:

$$\Psi = -\frac{1}{f}\left[x'_o + \frac{\pi d \varepsilon}{(c+d)x'_o}\right]$$

L'expression $\left[\Psi f + x'_o\right]x'_o = \frac{-\pi d \varepsilon}{(c+d)}$ est une constante pour un même enregistrement. La figure (IV-6) représente différentes mesures de Ψ sur un même enregistrement et pour différentes positions du point de filtrage x'_o. Les mesures ont été effectuées pour deux valeurs symétriques x'_o et $-x'_o$ les résultats étant alors exprimés par $|\Psi|$. Les résultats que nous avons obtenus montrent que la région de visibilité maximum dans le plan D' est bien définie à partir de l'angle Ψ. Toutes les mesures effectuées au voisinage du foyer image ($D' \ll f$) présentent un décalage par rapport à la direction de la droite de visibilité, décalage d'autant plus grand que x'_o est faible. Nous pouvons admettre que ce décalage parasite est du aux différentes approximations effectuées.

De plus la valeur de Ψ permet de déterminer sous certaines conditions, la valeur du rapport $\varepsilon/c+d$. En effet nous avons vu que pour un même enregistrement le terme $(\Psi f + x'_o)\, x'_o$ étant constant, pour les valeurs de x'_o suffisamment grandes ($x_o^2 \gg \pi d \varepsilon/c+d$) le terme $(\Psi f + x'_o)$ devient alors faible, la précision sur la valeur de Ψ ne permet pas alors d'accéder à la détermination du rapport $\varepsilon/c+d$

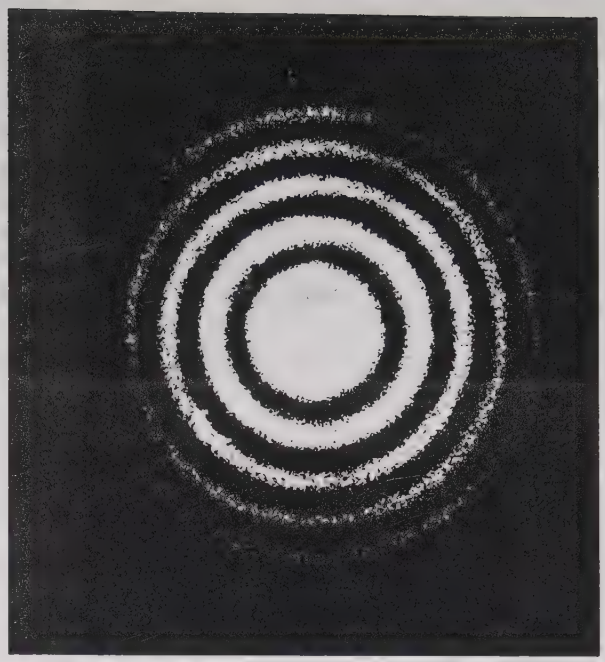
Dans le cas d'un système ne présentant pas d'astigmatisme (d = o) et pour le plan d'observation au foyer image ($D' = 0$) l'équation (IV-22), est toujours vérifiée, la zone de visibilité se ramène alors à la courbe définie par l'équation (IV-21), ce cas particulier n'a pu être observé expérimentalement.

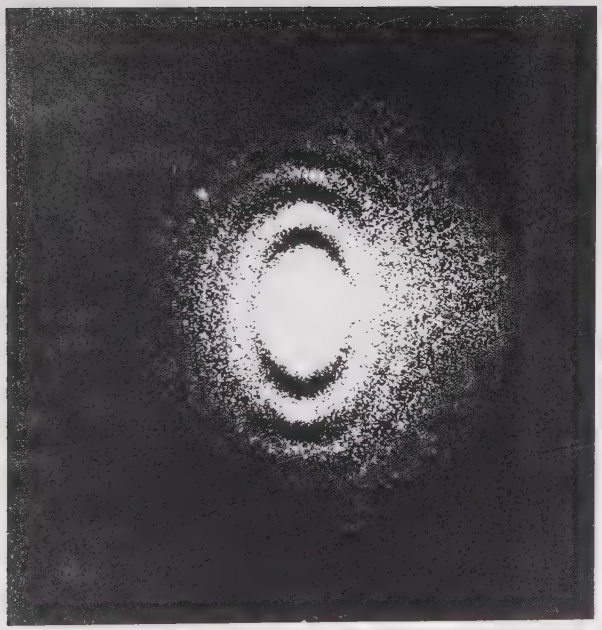
L'étude effectuée a pour but de déterminer la zone de visibilité maximum, il serait intéressant de reprendre les calculs pour déterminer une zone de bonne visibilité et de faire une étude systématique pour déterminer la situation des points M_3 et M_4 symétriques par rapport à l'axe OX.

Centre du champ:

$x'_o = 0$

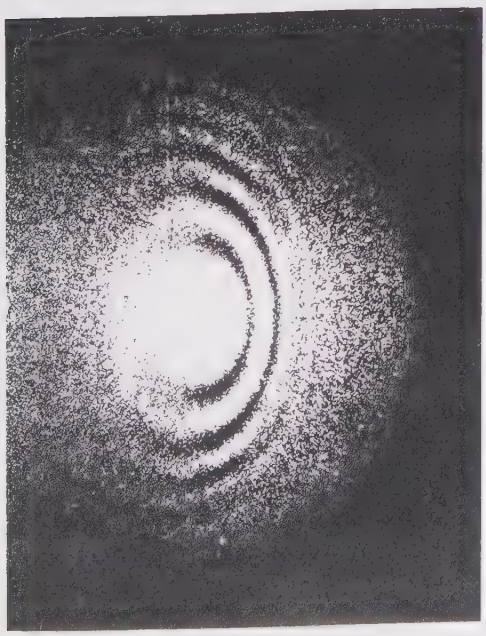
$D' = 0$





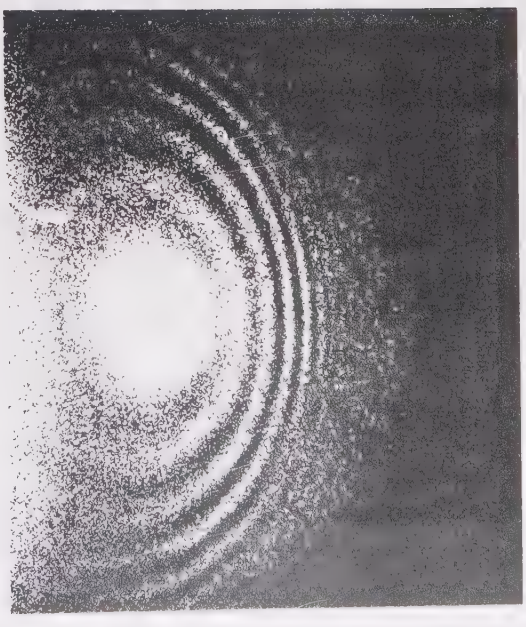
$x'_o = 8$ mm

$D' = 0$



$x'_o = 8$ mm

$D' = 12$ cm



$x'_o = 8$ mm

$D' = 300$ cm

fig. IV - 5

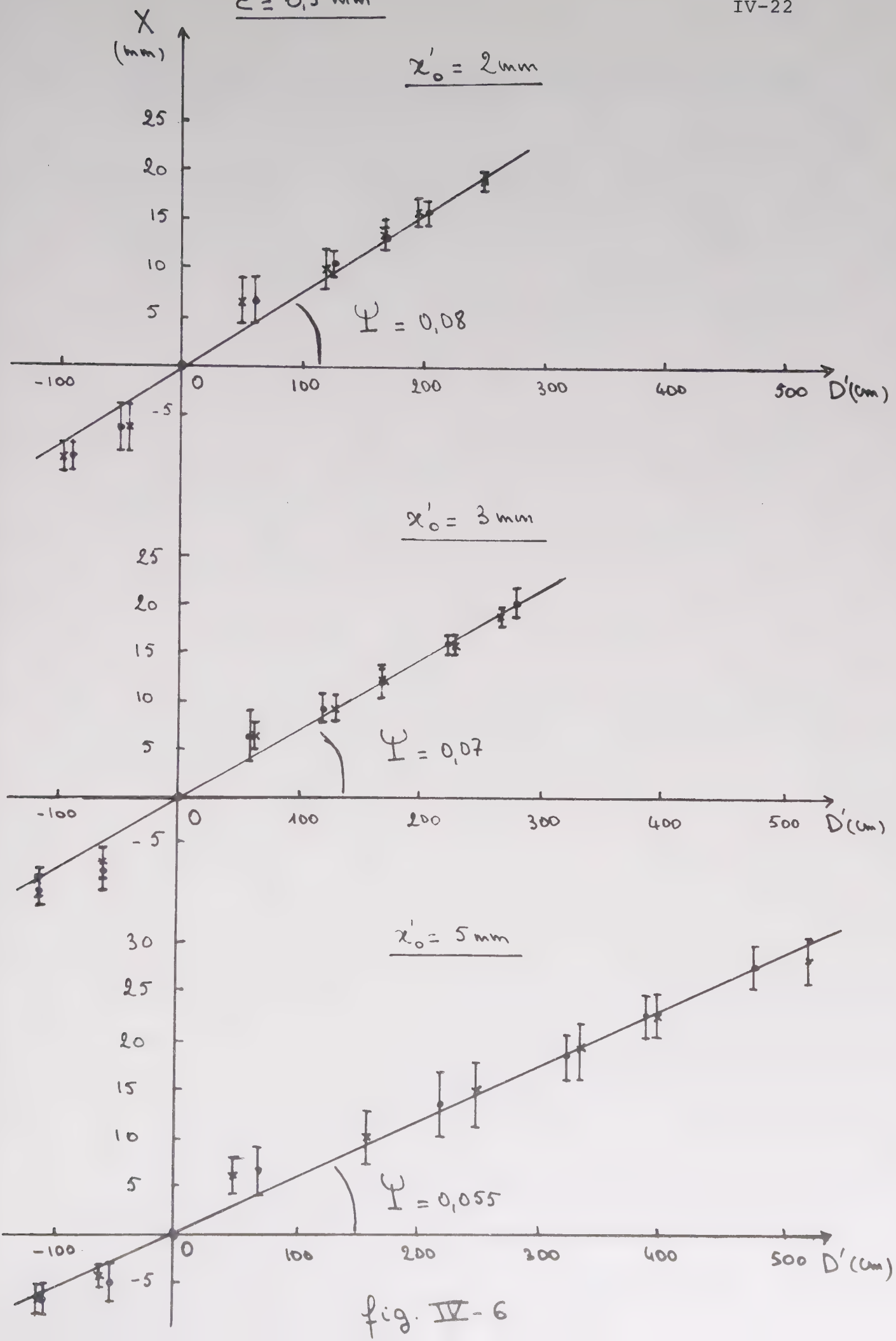


fig. IV-6

3 - Influence des variations de phase résiduelles du diffuseur photographique sur la visibilité.

Nous avons discuté en 1 et 2 l'influence des aberrations, de champ principalement sur la visiblité des franges d'interférence entre image directe et image conjuguée. Nous discuterons maintenant la deuxième hypothèse faite dans l'étude théorique: transprence de l'objet réelle.

Dans le cas général, un diffuseur partiel peut se caractériser par une transparence complexe de la forme

$$1 + R(x) + j\,I(x)$$

où R(x) et I(x) caractérisent les parties réelles et imaginaires de la transparence variable, et sont des fonctions réelles. On supposera que les valeurs moyennes de R(x) et I(x) sont petites devant 1.

Dans le cas d'un objet de phase, $e^{j\phi(x)}$ à variations faibles, on pourra écrire

$$R(x) = -\frac{1}{2}\,\phi^2(x)$$

$$I(x) = \phi(x)$$

Pour un diffuseur quelconque, considéré comme le produit d'un diffuseur de phase par un diffuseur d'amplitude on peut écrire la transparence sous la forme:

$$e^{j\phi(x)}\,[1 + A(x)]$$

et on a alors

$$R(x) = A(x) - \frac{1}{2}\,\phi^2(x)$$

$$I(x) = \phi(x)$$

On pourra généralement, si ϕ (x) et A (x) sont du même ordre, négliger ϕ^2 devant A. Dans ces conditions la partie réelle R(x) = A(x) caractérise la variation d'amplitude, et la partie imaginaire la variation de phase.

On définit les fonctions de corrélation respectives de R(x) et I(x) par

$$\langle R(x_1)\,R(x_2)\rangle = r^2\,\rho_R(x_1 - x_2)$$

$$\langle I(x_1)\,I(x_2)\rangle = i^2\,\rho_I(x_1 - x_2)$$

et on suppose que la fonction de corrélation est très étroite, comparée à la tache de diffraction du système, et peut être assimilée à une fonction $\delta (x_1 - x_2)$

L'amplitude diffusée directement par l'objet dans la plan de la pupille peut s'écrire

$$\delta(u) + \tilde{R}(u) + j\,\tilde{I}(u)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{R}(u) = \int R(x)\, e^{2j\pi u x}\, dx \\ \tilde{I}(u) = \int I(x)\, e^{2j\pi u x}\, dx \end{cases}$$

Avec les hypothèses utilisées dans le chapitre II, on peut écrire les amplitudes reconstruites par un hologramme enregistré en une seule pose sous la forme

$$I_D = \tilde{R}(u) + j\,\tilde{I}(u) \qquad \text{pour l'image directe}$$

$$I_C = \tilde{R}^*(-u) - j\,\tilde{I}^*(-u) = \tilde{R}(u) - j\,\tilde{I}(u) \qquad \text{pour l'image conjuguée}$$

Nous définirons encore la visibilité des franges par

$$V = \frac{2\,|\langle I_D I_C^* \rangle|}{\langle I_D I_D^* \rangle + \langle I_C I_C^* \rangle}$$

Cas de l'objet réel : $I(x) = 0$

$$\langle I_D I_C^* \rangle = \int \langle R(x_1) R(x_2) \rangle\, e^{2j\pi u (x_1 - x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

$$= r^2 \int \rho(x_1 - x_2)\, e^{2j\pi u (x_1 - x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

$$\langle I_D I_D^* \rangle = r^2\, C(u)$$

en désignant par $C(u)$ l'intégrale

$$\int \rho(x_1 - x_2)\, e^{2j\pi u (x_1 - x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

$C(u)$ est pratiquement constante sur la pupille si l'on suppose ρ très étroit par rapport à la tache de diffraction du système.

On obtient de même

$$\langle I_D I_D^* \rangle = \langle I_c I_c^* \rangle = \tau^2 C(u)$$

et on peut donc écrire $V = 1$

Cas de l'objet de phase pur: $R(x) = 0$

On obtient alors

$$\langle I_D I_c^* \rangle = j^2 \int \langle I(x_1) I(x_2) \rangle e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1 dx_2$$

$$= - i^2 C(u)$$

et

$$\langle I_D I_D^* \rangle = \langle I_c I_c^* \rangle = i^2 C(u)$$

On note un changement de signe de $\langle I_D I_c^* \rangle$, par rapport au cas précédent, ce qui correspond à un déphasage de

On obtiendra donc dans ce cas une visibilité égale à 1, mais des franges à centre noir. Ce phénomène a été signalé par Tanner (3).

Cas général.

Lorsque $R(x)$ et $I(x)$ sont différents de zéro, le problème se pose différemment suivant que l'on suppose $R(x)$ et $I(x)$ complètement indépendants, ou au contraire liés entre eux. Nous traiterons successivement ces deux cas.

Le expressions de $\langle I_D I_c^* \rangle$ et $\langle I_D I_D^* \rangle$ respectivement

$$\langle I_D I_c^* \rangle = \int \langle \{ [R(x_1) R(x_2) - I(x_1) I(x_2)] + j [R(x_1) I(x_2) + R(x_2) I(x_1)] \}$$

$$e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1 dx_2$$

et

$$\langle I_D I_D^* \rangle = \int \langle \{ [R(x_1) R(x_2) + I(x_1) I(x_2)] + j [R(x_1) I(x_2) - R(x_2) I(x_1)] \} \rangle$$

$$e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1 dx_2$$

Nous supposerons tout d'abord R(x) et I(x) complètement indépendants. On peut alors écrire

$$\langle R(x_1)\, I(x_2) \rangle = \langle R(x_1) \rangle \langle I(x_2) \rangle = 0$$

et on a lors, en supposant la même fonction ρ pour les deux fonctions R(x) et I(x):

$$\langle I_0 I_c^* \rangle = \int \langle R(x_1)R(x_2) - I(x_1)I(x_2) \rangle e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1\, dx_2$$

$$= (r^2 - i^2) \int \rho(x_1 - x_2)\, e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1\, dx_2$$

$$= (r^2 - i^2)\, C(u)$$

$$\langle I_0 I_0^* \rangle = \langle I_c I_c^* \rangle = \int \langle R(x_1)R(x_2) + I(x_1)I(x_2) \rangle e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1\, dx_2$$

$$= (r^2 + i^2)\, C(u)$$

On obtient alors pour la visibilité

$$V = \left| \frac{r^2 - i^2}{r^2 + i^2} \right|$$

On retrouve sur cette expression les résultats obtenus pour l'objet réel (i = o) ou l'objet de phase pur (τ = o), qui correspond à un changement de signe.

Dans le cas général, on peut en conclure à une baisse de visibilité liée au rapport i^2/r^2 entre la modulation moyenne de la phase et la modulation moyenne de l'amplitude.

Cependant dans le cas d'un diffuseur réalisé par photographie de "speckle", les variations de phase sont toujours liées au noircissement, c'est-à-dire aux variations d'amplitude.

Nous supposerons maintenant une variation de phase proportionnelle à la variation d'amplitude, c'est-à-dire

$$I(x) = k\, R(x) \qquad \tilde{I}(u) = k\, \tilde{R}(u)$$

avec k petit devant 1 .

Dans ces conditions on peut écrire

$$I_D(u) = \tilde{R}(u)(1 + j\beta)$$

$$I_C(u) = \tilde{R}(u)(1 - j\beta)$$

et on obtient pour $\langle I_D I_C^* \rangle$ et $\langle I_D I_D^* \rangle$

$$\langle I_D I_C^* \rangle = (1+j\beta)^2 \int \langle R(x_1) R(x_2) \rangle e^{2j\pi u(x_1 - x_2)} dx_1 dx_2$$

$$= (1+j\beta)^2 r^2 C(u)$$

$$\langle I_D I_D^* \rangle = (1+j\beta)(1-j\beta) r^2 C(u)$$

$$|\langle I_D I_C^* \rangle| = \langle I_D I_D^* \rangle = 1 + \beta^2$$

Les modules des deux expressions sont égales et on trouve donc V = 1

Cependant la phase de $\langle I_D I_C^* \rangle$ varie en fonction de k : il en résulte, dans le système d'interférence obtenu, une variation de phase uniforme dans le champ, ϕ_0 définie par

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{2\beta}{1-\beta^2}$$

Ce résultat qui devrait se traduire pratiquement par une variation de l'état d'interférence au centre (passage progressif d'un centre blanc à un centre noir, sans variation de visibilité) est difficile à déceler dans le cas d'anneaux.

Expérimentalement nous n'avons pas pu mettre en évidence, en utilisant des diffuseurs présentant des variations de phase faible, mais différentes d'un diffuseur à l'autre, des variations de visibilité significatives. C'est pourquoi dans nos conditions expérimentales, où aucun rôle majeur du déphasage résiduel n'a pu être mis en évidence nous retiendrons plutôt l'hypothèse d'une relation entre partie réelle et imaginaire de la transparence.

Cependant, il est probable que la réalité physique est plus complexe que les modèles simples proposés dans cette étude. Une étude systématique du phénomène, qui nécessiterait la réalisation de diffuseurs de constantes bien définies, serait longue et délicate, et nous ne l'avons pas entreprise.

CHAPITRE V

METHODE D'ETUDE DES ABERRATIONS DE CHAMP (26)

Nous avons montré qu'à partir de l'enregistrement d'un hologramme de la pupille du système il était possible d'obtenir un interféromètre en temps réel, cet interféromètre étant utilisé pour déterminer des déplacements. La limitation pour une utilisation de l'hologramme sur tout le champ est principalement une baisse de visibilité due à la présence d'aberration de champ comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Nous proposons donc l'étude de ces aberrations à partir de l'enregistrement de deux pupilles correspondant a deux points différents du champ. Les différents filtrages utilisés nous permettrons de déterminer coma, courbure, astigmatisme et distorsion. Nous discuterons également la possibilité d'étudier ces différents coefficients à partir d'un filtrage en lumière blanche.

1 - Principe de l'expérience - Enregistrement en double pose.

Nous supposerons toujours, pour faciliter les calculs, que le système est de type télécentrique (4f), la généralisation des résultats est immédiate pour un système quelconque. Le montage est donné par la figure II-1, nous rappelons les coordonnées:

(x,y) plan objet

(u,v) plan pupille

(x', y') plan image

L'amplitude dans le plan image donnée par l'expression II-4 est:

$$\int \delta(u,v) P(u,v) e^{j\phi(u,v,x',y')} e^{2j\pi(ux'+vy')} du\,dv$$

$$+ \int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{j\phi(u,v,x',y')} e^{2j\pi(ux'+vy')} du\,dv$$

Le premier terme représente l'onde directement transmise, jouant le rôle de référence, le second terme l'onde diffusée.
La plaque photographique H placée dans le plan image enregistre l'intensité reçue:

$$1 + \int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{j[\phi(u,v,x',y') - \phi(0,0,x',y')]} e^{2j\pi(ux'+vy')} du\,dv$$

$$+ \text{ C.C.}$$

L'hologramme a été enregistré en obturant la moitié de la pupille, les images directe et conjuguée reconstruites sont alors séparées spatialement. Après la première exposition l'objet est translaté dans son plan de la grandeur Δx , la plaque photographique étant translatée de la grandeur $\Delta x'$, image de Δx ($\Delta x' = -\Delta x$).

Après cette translation Δx de l'objet l'amplitude complexe dans le plan de la pupille devient:

$$\left[\delta(u,v) + \tilde{A}(u,v)\right] P(u,v) e^{2j\pi u \Delta x} e^{j\phi(u,v,x',y')}$$

La translation $\Delta x'$ de la plaque photographique crée un changement d'origine selon cet axe: le point de la plaque qui était en x' se trouve après translation en x' + $\Delta x'$. Dans l'expression de l'intensité l'amplitude complexe correspondant à l'image directe s'écrit alors:

$$\int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{2j\pi u \Delta x} e^{j[\phi(u,v,x'+\Delta x',y') - \phi(0,0,x'+\Delta x',y')]} e^{2j\pi[u(x'+\Delta x')+vy']} du\,dv$$

La relation $\Delta x' = -\Delta x$ nous permet d'obtenir pour l'amplitude complexe:

$$\int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{j[\phi(u,v,x'-\Delta x,y') - \phi(0,0,x'-\Delta x,y')]} e^{2j\pi[ux'+vy']} du\,dv$$

La transparence de l'hologramme, enregistré en deux poses successives, correspondant à l'image directe s'écrit en deux termes:

$$\int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{j\delta[\phi(u,v,x',y') - \phi(0,0,x',y')]} e^{2j\pi(ux'+vy')} du\,dv$$
$$+ \int \tilde{A}(u,v) P(u,v) e^{j\delta[\phi(u,v,x'-\Delta x,y') - \phi(0,0,x'-\Delta x,y')]} e^{2j\pi(ux'+vy')} du\,dv$$

(V-1)

Les franges obtenues, à la reconstruction, par interférences entre ces deux images directes sont données par l'équation:

$$\left[\phi(u,v,x',y') - \phi(0,0,x',y')\right] - \left[\phi(u,v,x'-\Delta x,y') - \phi(0,0,x'-\Delta x,y')\right] = C^{te}$$

On obtiendra une expression plus symétrique en choisissant comme origine le milieu du segment joignant les points axe-plaque photographique dans les deux poses: le première pose correspond à un déplacement $+\frac{\Delta x}{2}$ la deuxième pose $-\frac{\Delta x}{2}$

La détermination classique des aberrations pour un point (x,y) du champ par rapport au rayon passant par le centre de la pupille est donnée par l'expression II-12 : $\Phi(u,v,x,y)$ tel que:

$$\Phi(u,v,x,y) = \phi(u,v,x,y) - \phi(0,0,x,y)$$

L'équation des franges s'écrit alors:

$$\Phi(u,v,x+\tfrac{\Delta x}{2},y) - \Phi(u,v,x-\tfrac{\Delta x}{2},y) = C^{te} \qquad \text{(V-2)}$$

Les termes indépendant du champ, aberration sphérique et défaut de mise au point disparaissent de l'équation qui devient:

$$\Delta x \Big\{ b(u^2+v^2)u + 2c(u^2+v^2)x + 2d\left[(u^2-v^2)x + 2yuv\right] + e\left[(3x^2+y^2)u + 2xyuv + u\frac{\Delta x^2}{4}\right] \Big\} = C^{te} \qquad \text{(V-3)}$$

Nous devons également tenir compte d'erreurs qui pourraient s'introduire au niveau du montage:

- erreurs de centrage de l'onde de référence dans la pupille δu et δv coordonnées de l'onde de référence.

- erreurs sur le déplacement $\Delta x'$

$$\delta x \quad , \quad \delta y = \beta_y \Delta x \quad , \quad \delta_z = \beta_z \Delta x \qquad \text{(V-4)}$$

où β_y et β_z sont les composantes de l'erreur angulaire sur la direction du déplacement.

En considérant les erreurs δu et δv petits devant u et v l'expression V-3 devient:

$$\Delta x \Big\{ b\left[(u^2+v^2)u + (u^2+v^2+2uv)\delta u\right] + 2c\left[(u^2+v^2)x + 2x(u\delta u + v\delta v)\right]$$
$$+ 2d\left[x(u^2-v^2) + 2yuv + 2x(u\delta u - v\delta v) + 2y(u\delta v + v\delta u)\right]$$
$$+ e\left[u(3x^2+y^2) + 2xyuv + u\frac{\Delta x^2}{4} + (3x^2+y^2)\delta u + 2\delta v\left(2xy + \frac{\Delta x^2}{4}\right)\right]\Big\}$$
$$+ 2\pi u \delta x + 2\pi v \beta_y \Delta x + \pi d \beta_z \frac{\Delta x}{2}(u^2+v^2)$$

(V-5)

Nous allons étudier les informations obtenues à partir de deux types de filtrage:
- filtrage dans le plan de l'hologramme et observation dans le plan de Fourier.
- filtrage dans le plan de Fourier et observation dans le plan image de la plaque.

2 - Résultats obtenus par filtrage sur l'hologramme.

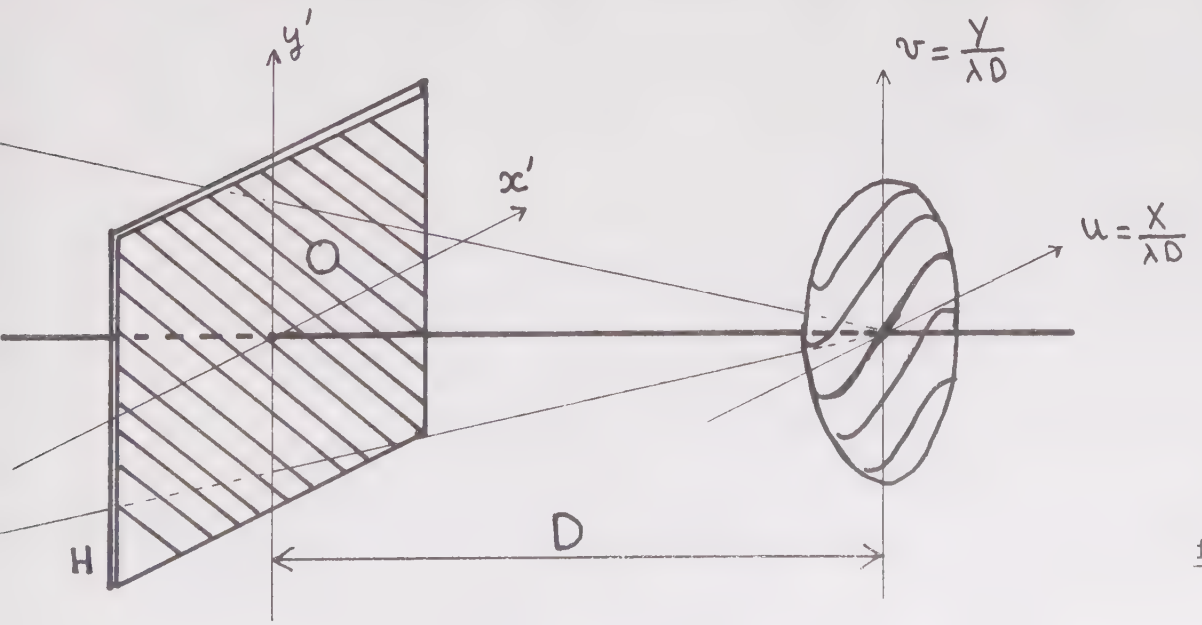


figure V-1

L'image de la pupille est reconstruite dans le plan P' où converge l'onde qui éclaire la plaque H. On limite une petite région de l'hologramme centrée au point (x', y') les franges observées dans le plan (u',v') sont caractéristiques des interférences entre les images reconstruites pour deux points différents du champ.

Si l'on se place en (x'= o, y'=o), nouveau centre de symétrie de la plaque, l'équation des franges s'écrit en l'absence d'erreurs expérimentales:

$$\Delta x \left[b\, u(u^2+v^2) + e\, \frac{\Delta x^2}{4}\, u \right] = 2k\pi \qquad \text{(V-6)}$$

Le terme de coma b peut donc s'interpréter comme une déformation du système de franges rectilignes parallèles à l'axe v' (figure V-2)

Sur la droite $u = u_o$ l'intersection avec deux franges successives est obtenuepour deux valeurs v_1 et v_2 telles que:

$$b\,\Delta x\, u_o (v_1^2 - v_2^2) = 2\pi \qquad \text{(V-7)}$$

La mesure de u_o, v_1 et v_2 permet donc de déterminer b.

Nous avons supposé pour obtenir la valeur du coefficient de coma que les erreurs expérimentales étaient négligeables. Notons toutefois que les erreurs δ_x et $\beta_y \Delta x$ sur les déplacements introduisent seulement des termes linéaires en u et v qui n'empêchent pas de déterminer b: il suffit en effet de se référer alors au système de franges rectilignes correspondant. D'autre part le pas des franges rectilignes nous permet de déterminer la valeur $\left(\delta x + e\, \frac{\Delta x^3}{4} \right)$, la valeur du coefficient e étant déterminée comme nous le verrons par le filtrage dans le plan de Fourier, on pourra alors obtenir la valeur δ_x d'erreur sur les translations objet-plaque photographique. Le pas des franges rectilignes dans la direction v est donné par l'équation:

$$v \left[2e\, x\, y\, \Delta x + 2\pi \beta_y \Delta x \right] = 2\pi \qquad \text{(V-8)}$$

Le filtrage réalisé sur la plaque pour les points définis par l'hyperbole:

$$yx = -\frac{\pi \beta_y}{e} \qquad \text{(V-9)}$$

caractérise un système de franges rectilignes parallèle à l'axe v . La connaissance de la valeur de e permet de déterminer l'erreur angulaire β_y.
Par contre les erreurs de centrage δu, δv et $\beta_z \Delta x$ font intervenir des termes quadratiques qui perturbent les franges rectilignes. Il n'est plus alors possible de déterminer simplement le coefficient de coma. Il est donc nécessaire pour déterminer ce coefficient de coma de réaliser un bon centrage de l'onde de référence sur la pupille mais aussi de faire un réglage soigné du parallélisme des déplacements Δx et $\Delta x'$.
On peut noter qu'au centre du champ, si l'on néglige les termes de décentrage la différence de marche est toujours nulle: la frange passant par le centre sera une frange brillante.

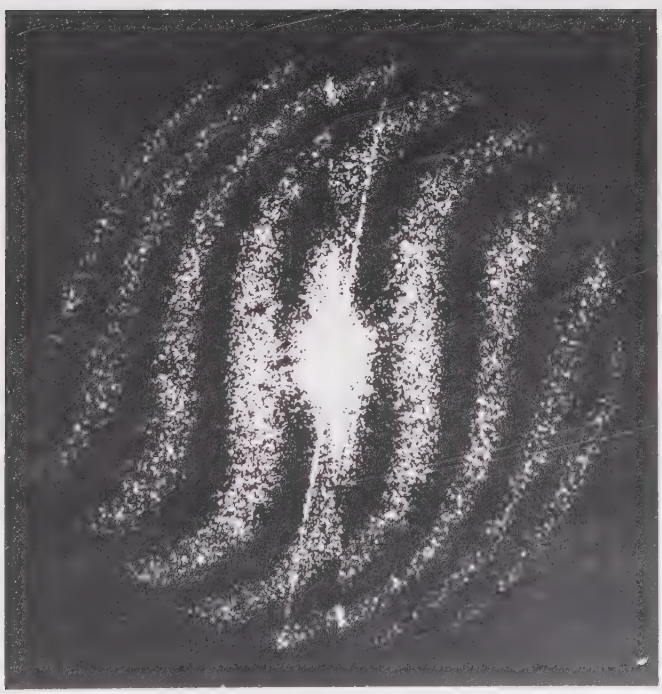


figure V-2

3) Résultats obtenus par filtrage dans le plan de Fourier.

Le montage expérimental pour réaliser le filtrage est schématisé sur la figure V-3.

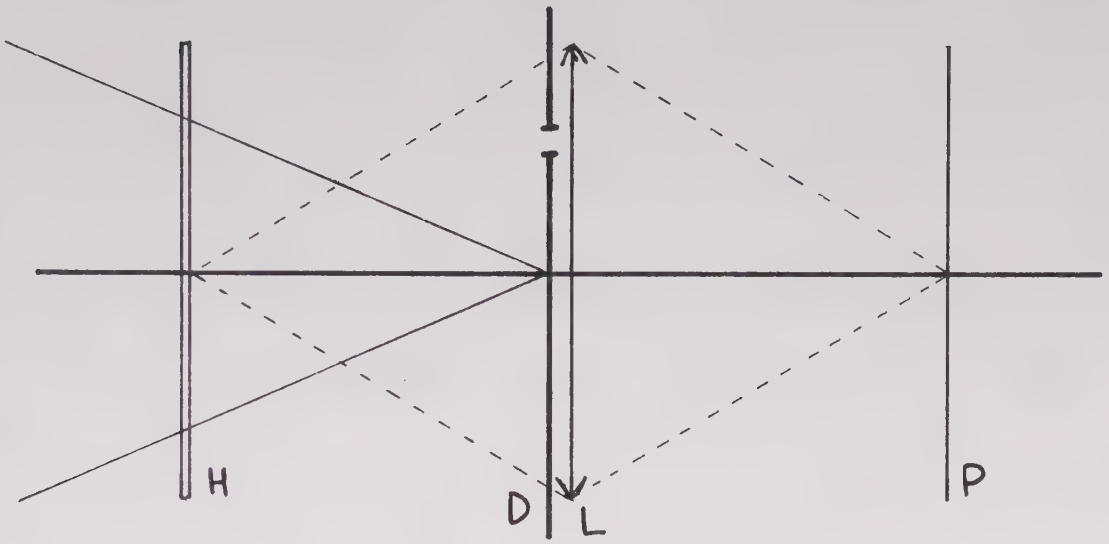


figure V-3

L'hologramme H est éclairé par une onde convergente; dans le plan de Fourier, image de la pupille du système, est placé le diaphragme D centré en (u_o , v_o). Les franges d'interférences sont observées, à l'aide de la lentille L dans le plan P image de la plaque photographique.

1) Filtrage dans la direction Ou ($u = u_o$, $v = 0$)

L'équation théorique des franges est :

$$u_o \Delta x \left\{ (3x^2+y^2)e + 2(c+d)u_o x + b u_o^2 + e\frac{\Delta x^2}{4} \right\} = 2k\pi$$

(V-10)

On observe donc un système de franges elliptiques dont le rapport des axes est $\sqrt{3}$. Le terme quadratique ne dépend que du coefficient de distorsion e, les termes quadratiques ne dépendant que de l'astigmatisme et de la courbure (figure V-6) La détermination du coefficient de distorsion se fera en mesurant sur l'axe Oy (Ox) les valeurs de $y(x)$ pour deux franges successives la relation étant:

$$\underline{\text{sur l'axe Oy}} : \quad u_o \Delta x \, e \, (y_1^2 - y_2^2) = 2\pi$$

$$\underline{\text{sur l'axe Ox}} : \quad 3u_o \Delta x \, e \, (x_1^2 - x_2^2) = 2\pi \qquad \text{(V-11)}$$

Dans le cas où le coefficient e est suffisamment grand pour pouvoir observer dans le champ une ellipse complète, on déterminera l'abscisse x_o du centre de l'ellipse, qui est directement reliée aux coefficients c, d et e par la relation:

$$x_o = \frac{c+d}{3e} u_o$$

Les seules erreurs expérimentales faisant intervenir un terme fonction de x ou y sont les décentrages (δu , δv).
Les nouvelles coordonnées du centre de l'ellipse seront alors:

$$\begin{cases} x_o = \dfrac{c+d}{3e}(u_o + 2\delta u) \\ y_o = \dfrac{d}{e}\delta v \end{cases}$$

L'influence des décentrages (δu , δv) peut facilement être éliminéeen réalisant la mesure du déplacement du centre Δx_o pour le déplacement Δu_o du point de filtrage, la relation devient:

$$\Delta x_o = \frac{c+d}{3e} \Delta u_o$$

Cas de la distorsion faible.

Dans le cas où la distorsion est très faible le système est alors formé de franges rectilignes dont l'équation est:

$$2\,\Delta x\,(c+d)\,u_o^2\,x = 2k\pi$$

En présence d'erreurs expérimentales cette équation devient:

$$u_o\,\Delta x\left\{2(c+d)(u_o+\delta u)\,x + 2d\,\delta v\,y\right\} = 2k\pi$$

L'intervalle entre deux franges successives suivant l'axe Ox est:

$$\frac{\pi}{(c+d)\,\Delta x\,u_o(u_o+\delta u)}$$

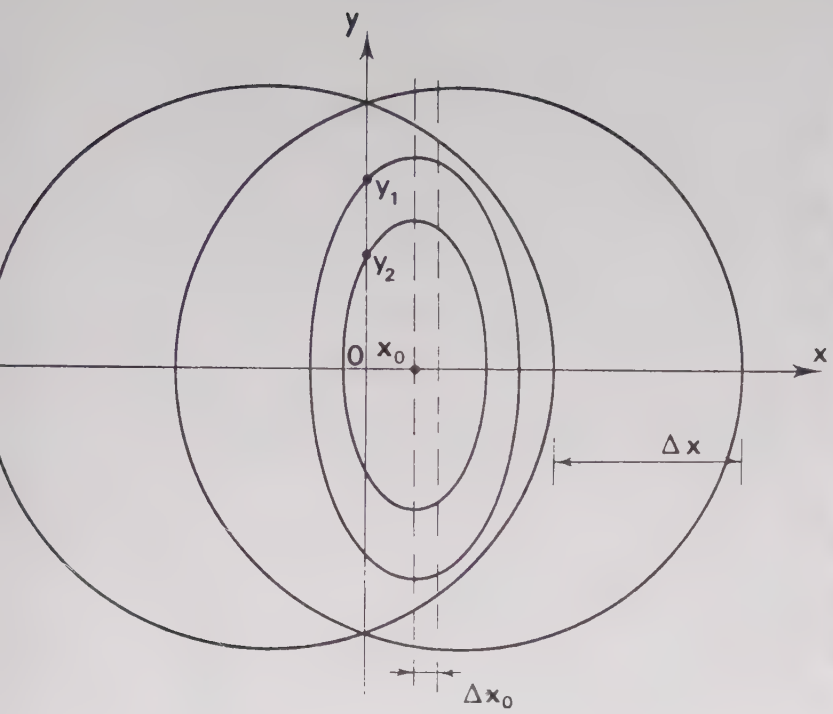
L'influence du décentrage δu faible est toujours négligeable. L'inclinaison des franges par rapport à l'axe Oy mettra en évidence un terme de décentrage δv lors de l'enregistrement. L'ordre d'interférence au centre du champ a toujours une valeur élevée:

$$\frac{\Delta x}{2\pi}\left(b\,u^3 + e\,u\,\frac{\Delta x^2}{4}\right)$$

il peut s'annuler pour la valeur $u^2 = -\dfrac{e\,\Delta x^3}{4\,b}$

Le filtrage dans le plan de Fourier suivant la direction Ou permet donc:

- de mesurer le coefficient de distorsion e
- de déterminer $\dfrac{c+d}{e}$ en présence de distorsion
- d'obtenir (c+d) lorsque la distorsion est faible.
- d'évaluer le terme de distorsion à partir d'une courbure de franges.



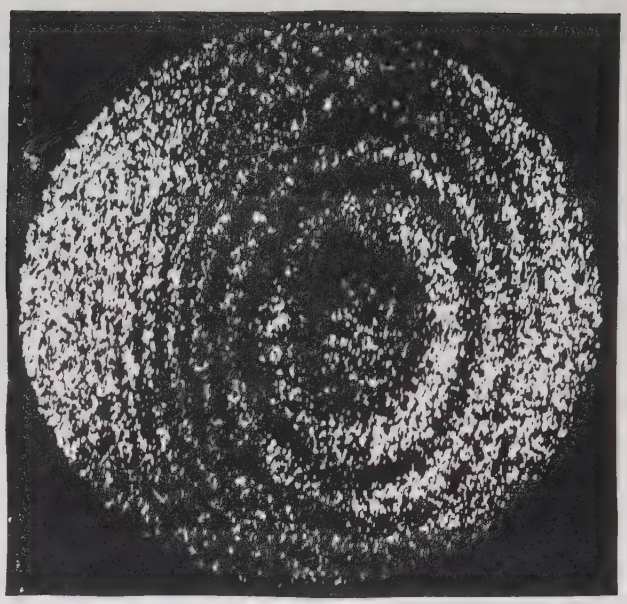


figure V-6

2) Filtrage dans la direction $0v$ ($u = 0, v = v_0$)

L'équation théorique des franges est alors

$$v_0 \Delta x \left\{ 2e\,xy + 2(c-d)v_0 x \right\} = 2k\pi \qquad \text{(V-12)}$$

C'est l'équation d'un système d'hyperboles à asymptotes rectangulaires ne dépendant que de la distorsion.

Le centre de symétrie de ces hyperboles a pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \dfrac{c-d}{e} v_0 \end{cases} \qquad \text{(V-13)}$$

La détermination de $(\frac{c-d}{e})$ est donc obtenu à partir de la relation (V-13); même en présence d'erreurs de centrage il est possible d'obtenir $(\frac{c-d}{e})$ en mesurant le déplacement Δy_0 correspondant au déplacement Δv_0 du point de filtrage.

L'intersection de deux franges consécutives avec la droite $x=x_1$ nous donne deux points y_1 et y_2 tels que:

$$2\nu_0 \Delta x (y_1 - y_2) e x_1 = 2\pi$$

Il est donc possible à partir des mesures de y_1, y_2 et x_1 de déterminer e.

Comme dans le cas de filtrage suivant Ou , lorsque la distorsion est négligeable le système observé est un système de franges rectilignes dont le pas suivant la direction x est:

$$p_x = \frac{\pi}{\Delta x (c-d) \nu_0 (\nu_0 + \delta\nu)}$$

C'est alors la valeur (c-d) qui est déterminée.
Sans erreurs expérimentales lors de l'enreristrement de l'hologramme la différence de marche au centre des hyperboles est toujours nulle (expression V-12), dans ce cas là le système de franges est symétrique. Par contre les erreurs expérimentales introduisant un terme de phase non nul au centre, le système n'est plus alors symétrique que pour certaines positions du diaphragme correspondant à une différence de marche au centre égale à $2k\pi$ donnée par l'équation :

$$\nu_0 \beta_y \Delta x + \nu_0^2 \beta_z \frac{\Delta x}{2} \Delta\pi + b \Delta x \delta u \nu_0^2 + e \frac{\Delta x^3}{4} \delta\nu = l k \pi \quad (V-14)$$

figure V-7

CONCLUSIONS:

Le filtrage dans le plan de Fourier permet d'obtenir, à partir de plusieurs mesures, les valeurs de e, $\frac{c+d}{e}$ et $\frac{c-d}{e}$ donc de déterminer ces trois coefficients.

Lorsque la distorsion est négligeable les deux coefficients c et d sont déterminés à partir des valeurs de c-d et c+d.

Nous avons également pu apprécier que les erreurs expéri mentales avaient une faible influence et qu'il était possible d'éliminer les erreurs commises à l'enregistrement en réalisant une double mesure dans le cas de la détermination du centre de symétrie.

L'expression V-10 du système de franges est obtenue à partir des interférences entre les deux images directes reconstruites par l'hologramme. Il est facile de montrer que le système obtenu par interférence entre les deux images conjuguées reconstruites par l'hologramme est identique, seuls les termes provenant d'un défaut de réalisation de l'égalité des déplacements seront affectés du signe opposé.

Il a noter que dans cette expérience le choix du déplacement Δx est totalement arbitraire, il sera choisi et ajusté en fonction de la valeur des aberrations de champ; dans le cas d'aberration de champ faibles la valeur de Δx sera choisie la plus grande possible mais la zone d'observation du système de franges sera alors d'autant plus réduite.

En enregistrant en deux poses, la demi-pupille du système étant obturée l'hologramme de cette demi-pupille, nous avons pu obtenir les différents coefficients d'aberration de champ. L'obturation de la demi-pupille n'étant, en pratique, pas toujours réalisable nous avons cherché les informations obtenues à partir de l'enregistrement à pleine pupille.

4 - Enregistrement holographique à pleine pupille-Filtrage en lumière blanche.

Le principe de l'enregistrement de l'hologramme est identique à celui présenté en obturant la demi-pupille. L'hologramme enregistré en deux poses et à pleine pupille restitue dans la pupille image du système:

- image directe et image conjuguée
- image directe et image conjuguée après translation de l'objet et de la plaque photographique.

Ces quatres images reconstruites possèdent toutes la même répartition "speckle" dans le plan image de la pupille, on obtient alors un système complexe d'interférences à quatre ondes.

Nous supposerons les erreurs de montage négligeables, leur influence étant étudiéepar la suite.

Les fonctions de phase correspondant à chaque image sont définies par :

- première pose : image directe $\Phi(u,v,x+\frac{\Delta x}{2},y)$
  image conjuguée $-\Phi(-u,-v,x+\frac{\Delta x}{2},y)$
- deuxième pose : image directe $\Phi(u,v,x-\frac{\Delta x}{2},y)$
  image conjuguée $-\Phi(-u,-v,x-\frac{\Delta x}{2},y)$

La fonction $\Phi(u,v,x,y)$ étant définie a partir de l'expression classique (II-12):

$$\Phi(u,v,x,y) = a(u^2+v^2)^2 + b(u^2+v^2)(ux+vy) + c(x^2+y^2)(u^2+v^2)$$
$$+ d\left[(u^2-v^2)(x^2-y^2)+4uvxy\right] + e(x^2+y^2)(ux+vy)$$

(V-15)

En regroupant les termes suivant leur parité par rapport à Δx , d'une part, à (u,v) d'autre part, on peut mettre ces différentes fonctions sous la forme:

Première pose :	Image directe	$\phi_0+\phi_1+\phi_2+\phi_3$
	Image conjuguée	$\phi_0+\phi_1-\phi_2-\phi_3$
Deuxième pose :	Image directe	$\phi_0-\phi_1+\phi_2-\phi_3$
	Image conjuguée	$\phi_0-\phi_1-\phi_2+\phi_3$

(V-16)

Avec :

$$\phi_0 = b(u^2+v^2)(ux+vy) + e(x^2+y^2)(ux+vy)$$

$$\phi_1 = a(u^2+v^2)^2 + c(x^2+y^2)(u^2+v^2) + c\frac{\Delta x^2}{4}(u^2+v^2) + d\left[(x^2-y^2)(u^2-v^2)+4xyuv\right] + d\frac{\Delta x^2}{4}(u^2+v^2)$$

$$\phi_2 = b\frac{\Delta x}{2}u(u^2+v^2) + e\frac{\Delta x}{2}\left[u(3x^2+y^2)+2vxy\right] + eu\frac{\Delta x^3}{8}$$

$$\phi_3 = 2cx\Delta x(u^2+v^2) + 2d\left[x\Delta x(u^2-v^2)+2y\Delta x uv\right]$$

(V-17)

L'expression du terme de phase est:

$$e^{j\phi_0}\left[e^{j(\phi_1+\phi_2+\phi_3)} + e^{j(\phi_1-\phi_2-\phi_3)} + e^{j(-\phi_1+\phi_2-\phi_3)} + e^{j(-\phi_1-\phi_2+\phi_3)}\right]$$

Dans l'expression de l'intensité le terme de phase ϕ_0 disparait, l'expression de l'intensité peut alors se mettre sous la forme:

$$1 + \frac{1}{2}\left[\cos 2(\phi_1+\phi_2) + \cos 2(\phi_1-\phi_2) + \cos 2(\phi_1+\phi_3) + \cos 2(\phi_1-\phi_3) + \cos 2(\phi_2+\phi_3) + \cos 2(\phi_2-\phi_3)\right] \quad \text{(V-18)}$$

Le système d'interférence à quatre ondes est complexe dans le cas général. Il se simplifie cependant si l'un des systèmes intervenant dans cette somme, de fréquence spatiale élevée, n'est pas résolu: dans ce cas le cosinus correspondant n'intervient que par sa valeur moyenne qui est alors nulle. Cette condition n'est jamais réalisée dans notre expérience, car les fréquences spatiales, liées aux aberrations restent faibles. Un effet comparable peut être observé si on utilise une source de lumière blanche, dans le cas où l'ordre d'interférence pour le système de franges observé est élevé. Dans le cas d'un système où la différence de marche est nulle au centre le système de franges reste observable et de bonne visibilité en lumière blanche.

Nous allons montrer que dans notre expérience l'observation en lumière blanche permet d'obtenir, dans certaines conditions, un système de franges unique utilisable pour déterminer les différents coefficients d'aberration.

1) Filtrage dans le plan de la plaque photographique.

L'observation des franges se fait dans le plan image de la pupille. Au centre du champ ($u = 0$, $v = 0$) la différence de marche est toujours nulle pour les trois termes de phase ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 quelque soit le point de filtrage (x,y) Il n'est pas alors possible d'observer séparément un système particulier de franges, les trois systèmes se superposant. On préférera utiliser le filtrage dans le plan de Fourier qui permet de séparer les systèmes de franges.

2) Filtrage dans le plan de Fourier

L'observation du système de franges se fait alors dans le plan image de la plaque photographique.

Le filtrage sera réalisé dans les directions particulières Ou et Ov, la dissymétrie étant crée par les déplacements suivant Ox de l'objet et de la plaque H.

a) Filtrage suivant Ou ($u = u_0$, $v = 0$)

L'expression (V-17) des différents termes de phase devient:

$$\phi_1 = a u_0^4 + c(x^2+y^2) u_0^2 + d(x^2-y^2) u_0 + (c+d)\frac{\Delta x^2}{4} u_0^2$$

$$\phi_2 = b\frac{\Delta x}{2} u_0^3 + e\frac{\Delta x^3}{8} u_0 + e\frac{\Delta x}{2} u_0 (3x^2+y^2)$$

$$\phi_3 = 2c\,\Delta x\, u_0^2 x + 2d\,\Delta x\, u_0^2 x$$

(V-19)

La différence de marche au centre du champ (x =o, y =o) est toujours nulle quelque soit u_0 pour le terme ϕ_3 , et toujours différente de 0 pour les termes ϕ_1 et ϕ_2 . Il en résulte que les différences de marche des termes $\phi_1 \pm \phi_3$ et $\phi_2 \pm \phi_3$ de l'expression (V-18) ne sont jamais nulles au centre du champ lorsque u_0 est non nul. Les franges correspondantes à ces deux systèmes ne sont donc pas observables en lumière blanche.

On montre qu'il peut exister une valeur particulière de u_0 qui annule le déphasage $\phi_1 + \phi_2$ (ou $\phi_1 - \phi_2$) au centre du champ.

L'équation de $\phi_1 \pm \phi_2$ est:

$$a u_o^4 + C(x^2+y^2) u_o^2 + d(x^2-y^2) u_o^2 + (c+d) \frac{\Delta x^2}{4} u_o^2$$

$$\pm b \frac{\Delta x}{2} u_o^3 + e u_o \frac{\Delta x^3}{8} + e \frac{\Delta x}{2} u_o (3x^2+y^2) \qquad \text{(V-20)}$$

Au centre du champ (x=o, y=o) la différence de marche nulle est alors donnée par l'équation:

$$a u_o^4 + (c+d) \frac{\Delta x^2}{4} u_o^2 \pm \left(b \frac{\Delta x}{2} u_o^3 + e u_o \frac{\Delta x^3}{8} \right) = 0 \qquad \text{(V-21)}$$

Pour la solution u_o non nulle satisfaisant l'équation au centre du champ $\phi_1 + \phi_2 = 0$, la solution $-u_o$ satisfait alors l'équation $\phi_1 - \phi_2 = 0$

On réalise donc par le filtrage en u_o une séparation entre les systèmes de franges $\phi_1 + \phi_2$ et $\phi_1 - \phi_2$

Le système de franges caractérisant $\phi_1 + \phi_2$ sera obtenu pour le point de filtrage u_o satisfaisant l'équation (V-21), une valeur approchée de u_o est obtenue en négligeant les termes d'ordre supérieur:

$$u_o = \frac{-e \Delta x}{2(c+d)} \qquad \text{solution de } \phi_1 + \phi_2 = 0 \qquad \text{(V-22)}$$

A partir de la mesure de la valeur u_o du point de filtrage pour lequel un sytème de franges est observé avec une bonne visibilité, on obtient donc une relation entre c, d et e. L'équation du sytème de franges $\phi_1 + \phi_2$ observé pour ce point particulier de filtrage nous permet d'accéder à une relation supplémentaire entre les différents coefficients, cette équation s'ecrit:

$$\left(3e \frac{\Delta x}{2} + (c+d) u_o \right) x^2 + \left(e \frac{\Delta x}{2} + (c-d) u_o \right) y^2 = c^{te} \qquad \text{(V-23)}$$

pour $u_o = - \frac{e \Delta x}{2(c+d)}$ cette équation devient:

$$x^2 + \left(\frac{d}{c+d} \right) y^2 = c^{te} \qquad \text{(V-24)}$$

Pour $\frac{d}{c+d} > 0$ les franges obtenues sont elliptiques; ce rapport est alors déterminé à partir du rapport des longueurs des axes. Dans le cas où $\frac{d}{c+d} < 0$ on obtient un

système d'hyperboles, le rapport est alors déterminé à partir de l'angle que font les asymptotes entre elles.

La position symétrique $u_1 = -u_o$ permet de résoudre l'équation $\phi_1 - \phi_2 = 0$, le système de franges, elliptiques ou hyperboliques, est identique à celui caractérisant $\phi_1 + \phi_2$; on obtient pas alors d'informations supplémentaires.

Nous avons négligé jusqu'à présent les erreurs expérimentales commises lors de l'enregistrement. Nous allons maintenant discuter de leur influence.

En tenant compte des erreurs de déplacement définies par l'expression (V-4), le point de filtrage pour lequel on peut observer le système $\phi_1 + \phi_2$ est donné par:

$$u_o = \frac{-\pi\left(\delta x + e\frac{\Delta x^3}{8}\right)}{(c+d)\frac{\Delta x^2}{4} + \pi\lambda\varepsilon + \pi\lambda\beta_3\delta\frac{\Delta x}{2}}$$

Le système de franges observé est toujours caractérisé par l'équation (V-23) mais l'expression du rapport des longueurs des axes ou de l'inclinaison des asymptotes ne prend plus la forme simplifiée que l'on a en négligeant les erreurs de déplacement et ne permet plus de déterminer les coefficients.
La figure (V-8) montre l'aspect observé pour la même valeur du filtrage :

- en lumière monochromatique
- en lumière blanche

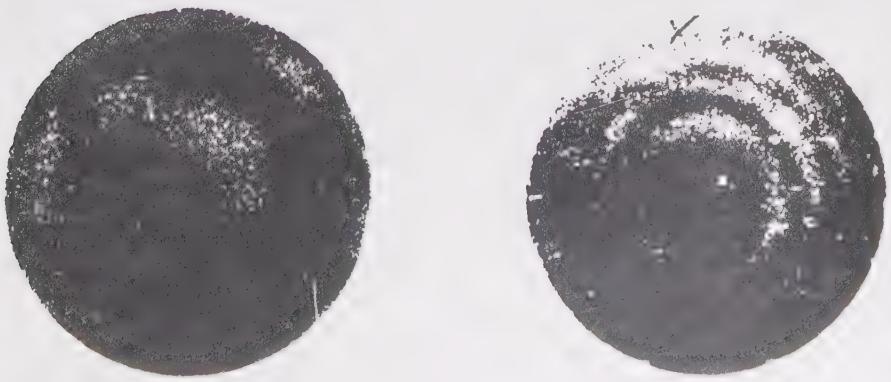


figure V-8

b) filtrage suivant Ov ($u = 0$, $v = v_0$)

L'expression des termes de phase s'écrit:

$$\phi_1 = a v_0^4 + c(x^2+y^2) v_0^2 + c\frac{\Delta x^2}{4} v_0^2 - d(x^2-y^2) v_0^2 + d\frac{\Delta x^2}{4} v_0^2$$

$$\phi_2 = e \Delta x v_0 \cdot xy$$

$$\phi_3 = 2c x \Delta x v_0^2 - 2d x \Delta x v_0^2$$

Les termes de phase ϕ_2 et ϕ_3 sont toujours nuls au centre du champ, ϕ_1 étant toujours différent de 0, l'expression de l'intensité se réduit alors aux seuls termes $\phi_2 - \phi_3$ et $\phi_2 + \phi_3$

$$1 + 1/2 \left[\cos 2(\phi_2 - \phi_3) + \cos 2(\phi_2 + \phi_3) \right] = 1 + \cos 2\phi_2 \cdot \cos 2\phi_3$$

Cette équation représente un sytème d'hyperboles (ϕ_2) dont le contraste est modulé par le terme $\cos \phi_3$. Suivant le cas on pourra donc utiliser soit les hyperboles, soit les franges de moiré pour obtenir une troisième relation entre les coefficients.

3- CONCLUSION

La méthode que nous avons mis au point pour déterminer les aberrations de champ nécessite une réalisation soignée du montage expérimental, surtout en présence d'aberrations faibles. L'expérience décrite ici en double exposition peut également être effectuée dans un montage en "franges vivantes", il est alors possible, plus facilement, de contrôler et d'éliminer les erreurs produites dans les déplacements.

C O N C L U S I O N

Le but du travail présenté est l'étude,à partir de quelques exemples d'application,des possibilités spécifiques - mais aussi des limitations - d'un interféromètre à double plage utilisant une photographie "speckle" .

Les possibilités du système proviennent essentiellement de l'utilisation d'une photographie "speckle" comme un élément holographique:

- utilisant la lumière diffusée,il porte l'information sur l'ensemble du champ et de l'ouverture du système.
- réalisé sur le système lui-même,il permet théoriquement de mettre en évidence toute variation de phase dans la pupille,indépendamment des défauts du système optique, "présents" dans les deux ondes qui interfèrent: c'est ce qui caractérise la plage "directe" de l'interféromètre.
- enfin l'utilisation simultanée de l'image holographique conjuguée donne une information supplémentaire et peut se définir comme une méthode de "conjugaison de phase" limitée en fait à la partie paire de la fonction"phase" étudiée.

Quant aux limitations, nous avons pu montrer qu'elles se ramènent à des problèmes de visibilité des franges, liés précisément à l'utilisation de la lumière diffusée; c'est cette étude de visibilité qui en montrant l'influence des aberrations de champ, nous a permis de réintroduire le problème des défauts du système optique, dont nous espérions nous affranchir,et d'étudier leur rôle pertubateur.

Sur le plan des applications, nous avons pu montrer que cet interféromètre se prête particulièrement bien à l'étude des déplacements, obtenus en grandeur et en signe, par l'utilisation de la double plage, et pour lesquels la baisse de visibilité propre aux aberrations ne joue pas un rôle critique.

L'utilisation pour l'étude du système optique lui-même mérite d'être mentionnée, en raison de la variété et de la souplesse des solutions offertes: double des aberrations paires, interférométrie différentielle avec choix du dédoublement et des termes linéaires, aberrations de champ, chromatisme, et cette liste n'est pas limitative.

Il faut noter également que le champ des applications, d'une façon générale, ne se limite pas aux exemples traités. D'autres types d'applications ont déjà été envisagés, avec plus ou moins de succès:

- problèmes d'alignement: on peut sur un tel montage controler le déplacement d'une source lumineuse le long de l'axe optique du système. Si la source lumineuse est utilisée comme source de référence dans l'interféromètre, son déplacement le long de l'axe n'introduit en principe aucune variation des franges sur les deux plages. Tout déplacement latéral (hors de l'axe) introduit en principe une variation de phase correspondant à la différentielle de la fonction aberration, à laquelle il faut ajouter le défaut de mise au point à l'enregistrement. La sensibilité au déplacement latéral est d'autant meilleure que de défaut de mise au point est plus fort (ou la fonction aberration plus importante) mais la visibilité subit alors des baisses très critiques, ce qui limite les possibilités. Sous sa forme actuelle l'expérience proposée n'apparait donc pas très favorable.

- problème de centrage d'éléments optiques: ce problème est beaucoup plus complexe , mais les premiers résultats sont encourageants.
Le principe de base est le suivant: pour un système optique centré, si après remise en place de l'hologramme on fait tourner le système autour de son axe optique, aucun changement n'intervient sur les deux plages d'interférence. Pour tout défaut de centrage apparaissent par contre:

  - des déplacements de l'image, traduits par l'apparition de franges rectilignes.
  - des variations de la fonction aberration caractéristiques des aberrations d'excentrement.

Ce système extrêmement sensible aux défauts de centrage du système lui-même est malheureusement très sensible également aux écarts de réglage (coincidence entre axe optique et axe de rotation, positions de l'objet et de l'hologramme par rapport à l'axe,...) Les difficultés de réalisation sont à la mesure de la sensibilité du dispositif, qui devrait permettre d'aboutir à une méthode précise de centrage.

Enfin une méthode d'étude des objets de phase offrant des possibilités intéressantes pourrait être développée à partir d'une modification assez simple du montage. Si l'on utilise en effet un diffuseur objet à répartition symétrique par rapport à l'axe, pour un objet de phase quelconque $\phi(u)$ placé dans la pupille d'un système parfait on observera simultanément après rotation de π de l'hologramme les interférogrammes caractérisant la phase $\phi(u)$ sur l'une des plages et le double de la phase, $2\phi(u)$, sur l'autre plage de l'interféromètre. La même expérience effectuée avec le système aberrant permet d'obtenir le double des aberrations et le double des aberrations impaires respectivement sur les deux plages.

Ces différents exemples permettent de montrer la variété et la simplicité des expériences réalisables à partir de l'interféromètre à double plage, sans perdre de vue toutefois les limites imposées par l'utilisation de la lumière diffuse et que nous pensons avoir également précisées.

BIBLIOGRAPHIE

(1) I. NEWTON - Optics - (Bell and Sons, LONDON 1931)

(2) S. DEBRUS, M. FRANCON, M. MAY - Optical Instruments and Techniques 1969 (ORIEL PRESS) p. 319

(3) L.H. TANNER J. Physi. (E) 1969, 2, 288

(4) J.M. BURCH Optical Instruments and Techniques 1969. (ORIEL PRESS) p. 213

(5) M.L. ROBLIN, G. SCHALOW, B. CHOURABI
J. Optics (Paris) 1977, 8, 149

(6) M. MENU, M.L. ROBLIN J. Optics (Paris) 1979, 10, 71.

(7) E. ARCHBOLD, A.E. ENNOS, Optica Acta 1972, 19, 253.

(8) A.E. ENNOS Laser Speckle and Related Phenomena 1975, SPRINGER VERLAG, BERLIN

(9) J.A. LEENDERTZ J. Phys. E (Sci. Instru.) 1970, 3, 214.

(10) D. JOYEUX Thèse (Orsay)

(11) D. JOYEUX, S. LOWENTHAL Opt. Comm. 1971, 4 , 108.

(12) M. MAY Journal of Physics D (Sci. Instr.) 1977, 10, 849.

(13) M. FRANÇON, P. KOULEV, M. MAY Opt. Comm. 1975, 13, 138.

(14) B. JEAN, M.L. ROBLIN Opt. Comm. 1980, 33, 123.

(15) A. MARECHAL Imagerie géométrique, aberrations (Paris) 1952.

(16) B. JEAN, M.L. ROBLIN Opt. Comm. 1981.

(17) J.M. BURCH, J.M.J. TOKARSKI Optica Acta 1968, 15, 101

BIBLIOGRAPHIE (suite)

(18) J.A. MENDEZ, M.L. ROBLIN Opt. Comm. 1975, 15, 226

(19) J.A. MENDEZ, M.L. ROBLIN N.R.O. 1976, 7, 105.

(20) J.A. MENDEZ Thèse - Saint-Sébastien (Esp.) 1976

(21) J. Ch. HAGOPIAN et M. MAY, J. Optics (Paris) 1978, 9, 217

(22) J. Ch. HAGOPIAN et M. MAY, Opt. Comm. 1978, 25, 323

(23) J. Ch. HAGOPIAN Thèse, Paris 1979

(24) K.A. STETSON J.O.S.A. 1977, 67, 1587

(25) M. MENU, M.L. ROBLIN J. Optics (Paris) 1979, 10, 1

(26) B. JEAN, M.L. ROBLIN J. Optics (Paris) (à paraitre)